UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse **Wintersemester 2022/23**

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 13

Abgabe: Freitag, 03.02.2022.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Folge von (deterministischen) Prozessen $(\mathcal{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $X^n_t := nt\mathbb{1}_{[0,1/n]}(t) + (2-nt)\mathbb{1}_{(1/n,2/n]}(t)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}^n$ Pfade in $\mathcal{C}([0,\infty))$ hat. Zeigen Sie weiter für $\mathcal{X} \equiv 0$, dass $\mathcal{X}^n \Rightarrow_{fdd} \mathcal{X}$ für $n\to\infty$, aber nicht $\mathcal{X}^n \Rightarrow \mathcal{X}$ für $n\to\infty$.

Lösung. Es gilt $\mathcal{X}^n_{1/n} = n\frac{1}{n} = 1 = (2-n\frac{1}{n})$ und $\mathcal{X}^n_{2/n} = (2-n\frac{2}{n}) = 0$. Damit folgert man leicht die Stetigkeit der Pfade von $\mathcal{X}^n$. Weiter gilt $(\mathcal{X}^n_{t_1},\dots,\mathcal{X}^n_{t_k}) \to (0,\dots,0)$ punktweise. Damit folgt $\mathcal{X}^n \Rightarrow_{fdd} \mathcal{X}$. Wählen wir $g\colon C([0,\infty),\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $g(f) = \sup_{s\in[0,1]}|f(s)|$, so gilt $f \in C_b(C([0,\infty),\mathbb{R}))$. Weiter gilt aber $|g(\mathcal{X}^n) - g(\mathcal{X})| = 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und damit gilt nicht $\mathcal{X}^n \Rightarrow \mathcal{X}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $Y_1, Y_2, \dots$ identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[Y_1] = 0$, $\mathrm{Var}[Y_1] = 1$, $Cov(Y_i, Y_j^3) = 0\ \forall i \neq j$ und $\mathrm{E}[Y_1^4] < \infty$.

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Folge in $\mathcal{C}([0,\infty))$ straff ist für $\mathcal{X}^n = (X^n_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit

$$X^n_t = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \ldots + Y_{\lfloor nt\rfloor} + (nt - \lfloor nt\rfloor)Y_{\lfloor nt\rfloor+1}).$$

Hinweis: Verwenden Sie Theorem 16.22 und rechnen Sie die dort vorausgesetzte Abschätzung für $\limsup_{n\to\infty}$ *anstelle von* $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ *nach. Wieso dürfen Sie das?*

Lösung. Es ist $\{X_n(0)\colon n\geq 1\} = \{0\}$ straff. Weiter überprüfen wir die Bedingung von Theorem 16.22: Sei dazu $0 \le s < t \le 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[|X^n_T - X^n_s|^4] &= n^{-2}\,\mathrm{E}\left[\left|(1-ns+\lfloor ns\rfloor)Y_{\lfloor ns\rfloor+1} + Y_{\lfloor ns\rfloor+2} + \cdots Y_{\lfloor nt\rfloor} + (nt-\lfloor nt\rfloor)Y_{\lfloor nt\rfloor+1}\right|^4\right] \\
&\le n^{-2}\left(\sum_{k=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor+1}\mathrm{E}[Y_k^4] + 6\sum_{\lfloor ns\rfloor+1\le k<l\le\lfloor nt\rfloor+1}\mathrm{E}[Y_k^2]\,\mathrm{E}[Y_l^2]\right) \\
&\le \frac{\lfloor nt\rfloor - [ns]+1}{n^2}E[Y_1^4] + 6\frac{(\lfloor nt\rfloor - \lfloor ns\rfloor+1)^2}{n^2}\,\mathrm{E}[Y_1^2]^2 \xrightarrow{n\to\infty} 6(t-s)^2(\mathrm{E}\,Y_1^2)^2\,.
\end{aligned}$$

In der ersten Ungleichung wurde ausgenutzt, dass $\mathrm{E}\,Y_iY_j^3 = Cov(Y_i,Y_j^3) = 0$ für $i\neq j$ wegen Unkorreliertheit und $EY_1 = 0$.

$$\limsup_{n\to\infty} E[|X^n_t - X^n_s|^4] \le 6|t-s|^2 E[Y_1^2]^2\,.$$

Damit ist das Kriterium aus Theorem 16.22 für $C = 6E[Y_1^2]^2$, $\alpha = 4$, $\beta = 1$ und ein hinreichend großes n_0 erfüllt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte, quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[Y_1] = a$ und

$$S_t = (Y_1 + \ldots + Y_{\lfloor t\rfloor} + (t-\lfloor t\rfloor)Y_{\lfloor t\rfloor+1}).$$

i) Zeigen Sie, dass
$$\sup_{0\le s\le t} \Big|\frac{1}{n}S_{sn} - as\Big| \xrightarrow{n\to\infty}_P 0.$$

ii) Folgern Sie aus *i)*, dass
$$(S_{nt}/n)_{t\in[0,\infty)} \to_P (at)_{t\in[0,\infty)} \text{ in } \mathcal{C}([0,\infty)).$$

iii) Zeigen oder widerlegen Sie
$$(S_{nt}/n)_{t\in[0,\infty)} \Longrightarrow (at)_{t\in[0,\infty)} \text{ in } \mathcal{C}([0,\infty)).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst
$$\sup_{s\le t} |S_{ns} - ans| \le \max_{k=1,\dots,\lfloor nt\rfloor+1} |S_k - ak|.$$
und verwenden Sie dann die Doob'sche Ungleichung für $p = 2$.

Lösung. Es gilt
$$\begin{aligned}\sup_{s\le t} |S_{ns} - ans| &\le \sup_{s\le \frac{\lfloor nt\rfloor+1}{n}} |S_{ns} - ans|\\ &\le \sup_{s\le \lfloor nt\rfloor+1} |S_s - as|\end{aligned}$$

Sein nun $s < \lfloor nt\rfloor + 1$ und k, sodass $k \le s < k+1 \le \lfloor nt\rfloor + 1$. Da für $s \in [k, k+1]$ die Abbildung $s \mapsto S_s - as = (s-k)Y_{k+1} - as$ eine lineare Abbildung ist, wird das Maximum bzw. Minimum am Rand angenommen und es folgt
$$|S_s - as| \le |S_k - ak| \wedge |S_{k+1} - a(k+1)|.$$

Damit erhalten wir
$$\sup_{s\le t} |S_{ns} - ans| \le \max_{k=1,\dots,\lfloor nt\rfloor+1} |S_k - ak|.$$

Da $(S_n - an)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist, folgt mit der Doobschen Ungleichung
$$\begin{aligned}P(\sup_{s\le t} |S_{ns} - ans| > \varepsilon n) &\le P(\max_{k=1,\dots,\lfloor nt\rfloor+1} |S_k - ak| > \varepsilon n)\\ &\le Var[S_{\lfloor nt\rfloor+1}]/\varepsilon^2 n^2 = (\lfloor nt\rfloor + 1)Var[Y_1]/\varepsilon^2 n^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die in Lemma 16.14 eingeführte Metrik r, ein $\varepsilon > 0$ und t so groß, dass $\int_t^\infty e^{-u}du \le \varepsilon/2$. Dann ist
$$\begin{aligned}&P\Big(r\big(t\mapsto S_{nt}/n, t\mapsto at\big) > \varepsilon\Big) = P\Big(\int_0^\infty e^{-u}(\sup_{s\le u}|S_{ns}/n - as| \wedge 1)du > \varepsilon\Big)\\ &\le P\Big(\int_0^t e^{-u}(\sup_{s\le u}|S_{ns}/n - as| \wedge 1)du > \varepsilon/2\Big) + P\Big(\int_t^\infty e^{-u}(\sup_{s\le u}|S_{ns}/n - as| \wedge 1)du > \varepsilon/2\Big)\\ &\le P\Big(t\sup_{s\le t}|S_{ns}/n - as| > \varepsilon/2\Big) + P\Big(\int_t^\infty e^{-u}du > \varepsilon/2\Big)\\ &= P\Big(\sup_{s\le t}|S_{ns} - ans| > \varepsilon n/2t\Big) + 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Daher gilt $(S_{nt}/n)_{t\ge 0} \to_P (at)_{t\ge 0}$ und damit auch die Verteilungskonvergenz.

Aufgabe 4 (4 Punkte Bonus)**.** Sei $(P_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $(P_i)_{i\in I}$ ist straff.

ii) Für alle Projektionen $\pi_1,\dots,\pi_d$ ist $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff.

Gilt diese Aussage auch für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{C}([0,\infty))$?

Lösung. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Betrachte $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ für ein $k \in \{1,\dots,d\}$. Da $(P_i)_{i\in I}$ straff ist, folgt, dass es ein $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt gibt mit $\inf\limits_{i\in I} P_i(K) \geq 1-\varepsilon$. Setze $A := \pi_k(K)$. Dann ist A kompakt und es gilt für jedes $i \in I$

$$P_i^{\pi_k}(A) = P_i\left(\pi_k^{-1}(A)\right) \overset{K\subset\pi_k^{-1}(A)}{\geq} P_i(K) \geq 1-\varepsilon.$$

Also gilt $\inf\limits_{i\in I} P_i^{\pi_k}(K) \geq 1-\varepsilon$.

ii) $\Rightarrow$ *i)*: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff für $k = 1,\dots,d$ sind, existieren $K_1,\dots,K_d \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $\inf\limits_{i\in I} P_i^{\pi_k}(K_k) \geq 1-\varepsilon/d$. Setze $K := \bigcap\limits_{k=1}^{d} \pi_k^{-1}(K_k)$. K abgeschlossen ist klar, da K als Schnitt über abgeschlosene Mengen definiert wurde. Die Beschränktheit folgt aus der Beschränktheit in jeder Komponenten, also ist K kompakt. Für alle $i \in I$ gilt

$$P_i(K) = 1 - P_i(K^c) = 1 - P_i\left(\bigcup_{k=1}^{d} \pi_k^{-1}(K_k^c)\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{d} \underbrace{P_i\left(\pi_k^{-1}(K_k^c)\right)}_{\leq\varepsilon/d} \geq 1-\varepsilon.$$

Damit gilt die Behauptung.

Für Maße auf $\mathcal{C}([0,\infty))$ gilt nur *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Für die andere Implikation ist zum Beispiel Aufgabe 1 ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 5 (4 Punkte Bonus)**.** Seien $\mathcal{X}^n$ und $\mathcal{X}$ wir im Satz von Donsker, Theorem 16.21, und ζ eine aufsteigende Partition wir in Definition 16.3. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\nu_{2,t,\xi}(\mathcal{X}^n) \xrightarrow{n\to\infty} \nu_{2,t,\xi}(\mathcal{X}).$$

Wie passt ihr Ergebnis mit dem Satz von Donsker zusammen?

Lösung. $\mathcal{X}^n$ ist stetig und stückweise linear und hat damit endliche 1-Variation. Mit Lemma 16.4 folgt, dass $\nu_{2,t,\xi}(\mathcal{X}^n) \equiv 0$. Da $\nu_{2,t,\xi}(\mathcal{X}) = t$, haben wir keine Konvergenz. Das Continuous mapping Theorem ist hier nicht anwendbar, da $\nu_{2,t,\xi} \notin C_b(\mathcal{C}([0,\infty)))$.