UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse

Wintersemester 2022/23

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 8

Abgabe: Freitag, 09.12.2022.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen

i) Ist $(X_i)_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar und $(\mathscr{F}_j)_{j\in J}$ eine Famile von Unter-σ-Algebren von $\mathscr{A}$. Dann ist die Familie $(E[X_i|\mathscr{F}_j])_{i\in I, j\in J}$ gleichgradig integrierbar.

ii) Zeigen Sie, dass die Umkehrung in $i)$ im Allgemeinen falsch ist.

iii) Ein Martingal $(X_t)_{0\le t\le T}$ für $0 < T < \infty$ ist gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $t_0 \in \mathbb{N}$, $(X_t)_{t=t_0,t_0+1,\dots}$ ein positiver integrierbarer stochastischer Prozess adaptiert an die Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\ge t_0}$ sowie $\mathscr{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t\ge t_0} \mathscr{F}_t\Big)$. Sei außerdem $a > -t_0$, sodass $\mathrm{E}\left[X_{t+1}|\mathscr{F}_t\right] = (1+\frac{a}{t})X_t$ für alle t. Zeigen Sie:

i) $t^{-a}E[X_t] \xrightarrow{t\to\infty} x \in (0,\infty)$.

ii) $t^{-a}X_t$ konvergiert fast sicher gegen eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$.

iii) Ist zusätzlich $q > 1$ und $E[X_t^q] \le ct^{qa}$ für ein $c < \infty$ und alle t, so gilt die Konvergenz aus $ii)$ auch in L^q.

Hinweis: Aus der Stirling-Formel für die Gamma-Funktion folgt, dass es für jedes $a > -t_0$ ein $c_a \in (0,\infty)$ gibt, sodass $t^{-a}\prod_{k=t_0}^{t-1}\frac{k+a}{k} \xrightarrow{t\to\infty} c_a$. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $Z = (Z_t)_{t=1,\dots,T}$ unabhängig standard normalverteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ die von Z erzeugte Filtration, wobei $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Für Konstanten $X_0 > 0$, $\sigma_i > 0$, und $\mu_i \in \mathbb{R}$ definieren wir den Prozess X bestehend aus log-normalverteilten Zufallsvariablen wie folgt

$$X_t := X_0 \prod_{i=1}^{t} e^{\sigma_i Z_i + \mu_i} \quad t = 0,\dots,T.$$

Konstruieren Sie ein äquivalentes Maß $Q \sim P$, unter welchem die Zufallsvariablen X_t log-normalverteilt sind und der Prozess X ein Martingal bildet.
Hinweis: Finden Sie $Q \sim P$, sodass $Z_1,\dots,Z_T$ unabhängig sind und Z_t normalverteilt ist. Finden Sie den Erwartungswert und die Varianz, sodass X ein Martingal ist. Wenn $Z \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$, so gilt $E[e^Z] = e^{\mu+\sigma^2/2}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jedes Supermartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $E[X_n] = E[X_0]$ für alle n ist bereits ein Martingal ist.