Stochastische Prozesse — Wintersemester 2022/23

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 7

Abgabe: Freitag, 02.12.2022.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängig und identisch verteilt mit $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Seien $S_0 := 0$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ sowie $a < 0 < b \in \mathbb{Z}$ und die Stoppzeit $T_{a,b} := \min\{n \geq 1 \mid S_n \in \{a,b\}\}$ der erste Zeitpunkt, an dem die Summenfolge entweder a oder b erreicht.

i) Zeigen Sie, dass $P[T_{a,b} > n(b-a)] \leq (1 - \frac{1}{2^{b-a}})^n$,
ii) Folgern Sie aus i), dass $E[T_{a,b}] < \infty$,
iii) Folgern Sie aus ii), dass $P[S_{T_{a,b}} = a] = \frac{b}{b-a}$,
iv) Sei nun $T_a := \min\{n \geq 1 | S_n = a\}$ der erste Zeitpunkt, an dem der Summenprozess a erreicht. Folgern Sie aus iii), dass $P[T_a < \infty] = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie für iii) die Idee aus Beispiel 14.25: Betrachten Sie die Voraussetzungen des Optional Sampling Theorems, um eine Version der Wald'schen Identität zu formulieren, die den gegebenen Voraussetzungen genügt.
Für iv) ist die Abschätzung $P(T_a < \infty) \geq P(T_a < T_b)$ sehr hilfreich.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei M ein Martingal in diskreter Zeit. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) M ist konstant,
ii) M is previsibel,
iii) $\langle M \rangle = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

i) Seien $Y_i,\ i = 1, 2, \dots$ unabhängig identisch verteilt mit $P(Y_i = 0) = 1 - P(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ mit $X_n := 2^n \prod_{i=1}^n Y_i$ ein Martingal ist bzgl. einer geeigneten Filtration. Konvergiert dieses fast sicher bzw. in L^1?
ii) Sei $(Z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(Z_n = 1) = \frac{1}{n} = 1 - P(Z_n = 0)$. Zeigen Sie, dass die Folge in $\mathcal{L}^1$ konvergiert, aber nicht fast sicher.
iii) Gibt es ein Martingal $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$, das in $\mathcal{L}^1$, aber nicht fast sicher konvergiert?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Geben Sie ein Martingal $(M_n)_{n\geq 1}$ an mit $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$ fast sicher.