UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse **Wintersemester 2022/23**

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 11

Abgabe: Freitag, 20.01.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg Funktion mit $a_0 = 0$. Weiter sei für alle $t \in \mathbb{R}_+$ die Variation $\nu_t(a) := \sup_\zeta \nu_{1,t,\zeta}(a) < \infty$. Wir definieren $a_{t-} := \lim_{s \nearrow t} a_s$ und $\Delta a_t = a_t - a_{t-}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. $\nu(a)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist eine monoton wachsende càdlàg Funktion mit $\nu(a)_0 = 0$ und $|a_t| \leq \nu_t(a)$.
2. Es gilt $\Delta\nu_t(a) = |\Delta a_t|$ und $\nu_t(a) = \nu_t(a)_- + |\Delta a_t|$.
3. Es gilt $\nu_t(a) \leq \nu_t(a)_- + |a_{t-}| + |a_t|$.
4. Es existieren eindeutig bestimmte monoton wachsende càdlàg Funktionen $b, c\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $b_0 = c_0 = 0$, so dass $a = b - c$ und $\nu(a) = b + c$. Diese sind gegeben durch $b = (a + \nu(a))/2$ und $c = b - a$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

1. Berechnen Sie die Variation $\nu_t(f)$ von f und zeigen Sie, dass diese endlich ist.
2. Sei f zusätzlich monoton wachsend. Die Abbildung $\mu[(s,t]] = f(t) - f(s)$, $s < t$ definiert ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie für $g \in L^1(\mu)$ folgende Rechenregel

$$\int g(x)\mu(dx) = \int g(x) f'(x) dx.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Bestimmen Sie für $\ell \geq 1$ die ℓ-Variation eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es sei $\mathcal{X}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}$ fast sicher für jedes $0 < \varepsilon < 1$ mindestens eine Nullstelle in $(0, \varepsilon)$ hat.