Stochastische Prozesse **Wintersemester 2022/23**

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 10

Abgabe: Freitag, 13.01.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\nu \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $\nu_j \geq 0$, $Q_{ij} \geq 0$ für alle i, j und $\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$, $\sum_{j=1}^n Q_{ij} = 1$ für alle i. Sei ferner $\mathcal{X}$ mit Werten in $\{1, \dots, n\}$ ein Prozess mit

$$\mathrm{P}(X_0 = j) = \nu_j,$$
$$\mathrm{P}(X_{t+1} = j|\mathscr{F}_t) = Q_{X_t,j},$$

für alle $j = 1, \dots, n$ und $t \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}$ ein starker Markov-Prozess ist und für alle $j = 1, \dots, n$ und $s, t \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\mathrm{P}(X_{t+s} = j|X_t) = (Q^s)_{X_t,j}$$

und

$$\mathrm{P}(X_t = j) = (\nu Q^t)_j.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei ν_0 eine Verteilung auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Übergangskerne $(\mu_{s,t})$ aus Aufgabe 2 Blatt 9 gegeben durch

$$\mu_t(x, \cdot) := \mathcal{N}(xe^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})) \text{ und } \mu_{s,t} := \mu_{t-s}$$

einen zeitlich homogenen und starken Markov-Prozess mit Startverteilung ν_0 erzeugen und bestimmen Sie den Generator.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ streng monoton steigend mit $f(0) = 0$, $\mathcal{P} = (P_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität 1 und $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Markovkette in diskreter Zeit mit Werten in $\mathbb{Z}$ und Übergangsmatrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$. Weiterhin seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{M}$ stochastisch unabhängig.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t := M_{P_{f(t)}}$ einen Markov-Prozess bezüglich seiner natürlichen Filtration bildet und bestimmen Sie Übergangskerne und -operatoren.
2. Welche Vorraussetzungen müssen f und Q erfüllen damit der Prozess $\mathcal{X}$

   i) räumlich homogen ist. ii) zeitlich homogen ist.

   Bestimmen Sie in Fall ii) den Generator.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $d \geq 1$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit kompaktem Support.

1. Setze

   $$p(t, x) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2t}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty).$$

   Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ gilt, dass

   $$\int p(t, x) \tfrac{\triangle f}{2}(x) dx = \int f(x) \tfrac{dp}{dt}(t, x) dx,$$

   wobei $\triangle := \sum_{k=1}^d \frac{d^2}{dx_k^2}$ den Laplace-Operator bezeichnet.

2. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensional Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie (ohne Verwendung von Theorem 15.30), dass

$$M_t^f := f(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \triangle f(B_s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

ein Martingal bezüglich der von B erzeugten Filtration ist.

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.**

1. Sei $\mathcal{X}$ ein Feller Prozess mit Generator $G^{\mathcal{X}}$ und Domain $\mathcal{D}(G^{\mathcal{X}})$. Weiter sei $\mathcal{D} \subset D(G^{\mathcal{X}})$ so, dass $G^{\mathcal{X}}(\mathcal{D}) \subset C_b(E)$. Zeigen Sie für $f \in \mathcal{D}$ und beschränkte Stoppzeiten T folgende Gleichheit

$$E_x[f(X_T)] = f(x) + E_x\Big[\int_0^T G^{\mathcal{X}} f(X_s)ds\Big]$$

2. Sei $\mathcal{B} = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Standard Brown'sche Bewegung und die Stoppzeit T gegeben durch

$$T := \inf\{t \geq 0 | B_t \in \{0,1\}\}.$$

Zeigen Sie, dass $E[T|B_0 = x] = x(1-x)$ für $x \in (0,1)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass T eine fast sicher endliche Stoppzeit ist.