Stochastische Prozesse
Wintersemester 2022/23

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 9

Abgabe: Freitag, 16.12.2022, 09:15 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $X = (X_n)_{n=0,1,\dots}$ ein diskreter stochastischer Prozess mit Zustandsraum E und $(\mathscr{F}_n)_{n=0,1,\dots}$ die von X erzeugte Filtrierung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

1. X ist ein Markovprozess,
2. der Prozess $Y = (Y_n)_{n=0,1,\dots}$ definiert durch

$$Y_n = f(X_n) - \sum_{k=1}^{n} E[f(X_k) - f(X_{k-1})|X_{k-1}]$$

ist ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots}$ für alle messbaren und beschränkten Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Gegeben seien $\alpha, \sigma^2 \in (0, \infty)$. Sei weiter

$$K_t(x, \cdot) \coloneqq \mathcal{N}(xe^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}))$$

für $t > 0$ und $K_0(x, \cdot) := \delta_x$. Zeigen Sie: Für $s, t \geq 0$ gilt $K_s K_t = K_{t+s}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung und $Y_t \coloneqq e^{-t/2} X_{(e^t-1)}$. Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Gauss-Prozess sowie ein Markov-Prozess ist. Bestimmen Sie außerdem den schwachen Grenzwert von Y_t für $t \to \infty$.