Stochastische Prozesse **Wintersemester 2022/23**

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 11.11.2022.

Aufgabe 1 (4 Punkte). i) Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ zwei unabhängige Poisson Prozesse zu den Parametern $\lambda > 0$ und $\mu > 0$. Zeigen Sie, dass $(X_t + Y_t)_{t\geq 0}$ ist ein Poisson Prozess zum Parameter $\lambda + \mu$ ist.

ii) Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ zwei unabhängige Brown'sche Bewegungen. Zeigen Sie, dass $\big((X_t + Y_t)/\sqrt{2}\big)_{t\geq 0}$ ist wieder eine Brown'sche Bewegung ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung mit $B_0 = 0$. Zeigen Sie, dass $(X_t)_{0\leq t\leq 1} := (B_t - tB_1)_{0\leq t\leq 1}$ ein Gauß'scher Prozess ist und berechnen Sie die Kovarianz-Struktur $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$, $0 \leq s, t \leq 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei T eine Stoppzeit. Zeigen Sie folgende Aussagen

i) Die σ-Algebra der T-Vergangenheit, definiert durch

$$\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{A} | A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+\}$$

ist eine σ-Algebra.

ii) Für die Stoppzeit $T \equiv s$ stimmt diese mit $\mathscr{F}_s$ überein für alle $s \geq 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Nennen Sie ein Beispiel für einen Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit stetigen Pfaden und eine zufällige Zeit T, die bezüglich der natürlichen Filtration von X eine Options- aber keine Stoppzeit bildet.

Hinweis: Betrachten Sie $X_t = (t - S)^+$ für eine geeignete nicht-negative Zufallsvariable S.