Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 04.11.2022.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $\Lambda \sim \Gamma(r, \frac{p}{p-1})$ für $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$ und für gegebenes Λ sei $X \sim \mathrm{Poi}(\Lambda)$. Zeigen Sie, dass $X \sim \mathrm{NB}(r,p)$ negativ Binomial verteilt ist, d.h. X besitzt die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P[X = k] = p_X(k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k.$$

Hinweis: Die Dichte der Gamma Verteilung $\Gamma(r, \frac{p}{p-1})$ *ist gegeben durch*

$$p_\Lambda(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(r)(\frac{p}{1-p})^r} \lambda^{r-1} e^{-\lambda(1-p)/p}.$$

Verwenden Sie (ohne Beweis) folgende Gleichheiten

$$\int_0^\infty x^b e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(b+1)}{a^{b+1}} \quad \textit{und} \quad \Gamma(k) = (k-1)! \;\; \textit{für } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie:

i) Finden Sie ein Beispiel von zwei Prozessen X und Y, welche Modifikationen voneinander sind und deren Pfade mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ gleich sind. Können X und Y ununterscheidbar sein?

ii) Geben Sie ein Beispiel von zwei stetigen Prozessen an, die zwar ununterscheidbar, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die Existenz eines Grundraums Ω und Zufallsvariablen $X_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) $X_t \sim \mathcal{N}(t, 1)$ und

ii) $(X_t)_{t\geq 0}$ sind stochastisch unabhängig.

Besitzt $(X_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Modifikation?

Hinweis: Für diese Aufgabe ist es notwendig die Begriffe Produktraum, Produkt-σ-Algebra und Produktmaß (auch für überabzählbare Indexmengen) gut zu verstehen. Eine Wiederholung finden Sie beispielsweise in Kapitel 6 im Skript. Die Existenz eines Produktmaßes für überabzählbare Produkte erhalten Sie mit dem Satz von Andersen-Jessen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei X ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathscr{A})$, sodass die Abbildung $X\colon \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar bzgl. $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ ist und dass $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Familie von zentrierten und unabhängigen Zufallsvariablen bildet mit $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[X_t^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass $X \equiv 0$ $dP \otimes dt$-fast überall gilt, dh. Gleichheit fast überall bzgl. dem Produktmaß $P \otimes \lambda$ auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$, wobei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}_+$ bezeichnet.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $E[(\int_0^t X_s ds)^2]$ *und folgeren Sie daraus die Aussage.*