UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse **Wintersemester 2022/23**

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 28.10.2022.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wir erweitern Beispiel 12.10 aus der Vorlesung. Auf einer Ebene bilden Geraden im horizontalen und vertikalen Abstand 1 ein Schachbrettmuster. Es werden Nadeln der Länge 1 rein zufällig auf die Ebene geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geworfene Nadel keine der Geraden schneidet?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Finden sie ein Beispiel für eine Zufallsvariable X und σ-Algebren $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$, sodass

$$E[E[X|\mathscr{F}]|\mathscr{G}] \neq E[E[X|\mathscr{G}]|\mathscr{F}].$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Der QUICKSORT Algorithmus ist ein Algorithmus, welcher einen Vektor $(x_1, \dots, x_n)$ in aufsteigender Reihenfolge sortiert und ist wie folgt definiert. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass alle Zahlen $x_1, \dots, x_n$ verschieden sind. Wir wählen zunächst $a := x_1$ als Pivot Element, vergleichen $x_2, \dots, x_n$ mit diesem und schreiben den Vektor so um, dass der Vektor

$$((x_{j_1}, \dots, x_{j_k}), a, (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k-1}}))$$

entsteht, wobei $x_{j_1}, \dots, x_{j_k} < a < x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k-1}}$. Beachte, dass hierfür $(n-1)$ Vergleichsoperationen nötig sind. Anschließend wird QUICKSORT rekursiv auf die beiden Teilvektoren $(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$ und $(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k-1}})$ angewendet.

Sei nun σ^n eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit Werten in der Menge der Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$. Wir nehmen an, dass σ gleichverteilt ist. Weiter sei $h(\sigma^n)$ die Anzahl der Vergleichsoperationen, die nötig sind, um einen Vektor $(\sigma^n(1), \dots, \sigma^n(n))$ mithilfe des QUICKSORT Algorithmus in aufsteigende Reihenfolge zu sortieren.

Finden Sie eine geeignete Partition $(B_i)_{i=1,\dots,M}$ von Ω, um durch geschicktes Bedingen den Erwartungswert $E[h(\sigma^n)]$ rekursiv darzustellen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Weiter sei $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ eine Sub-σ-Algebra. Die bedingte Varianz von X gegeben $\mathscr{A}$ sei wie folgt definiert:

$$Var(X|\mathscr{A}) := E[(X - E[X|\mathscr{A}])^2|\mathscr{A}].$$

Zeigen Sie, dass diese existiert und beweisen Sie folgende Varianzzerlegung

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var(E[X|Y]).$$