Stochastische Prozesse

Wintersemester 2022/23

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 1

Abgabe: Freitag, 21.10.2022.
Im Folgenden sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Definition 1. Sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine σ-Algebra. Eine Zufallsvariable $Y \in \mathcal{L}^1$ heißt bedingte Erwartung von X gegeben $\mathscr{F}$, symbolisch $E[X|\mathscr{F}] := Y$, falls gilt:

i) Y ist $\mathscr{F}$-messbar.

ii) Für jedes $A \in \mathscr{F}$ gilt $E[X 1_A] = E[Y 1_A]$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie $E[X|\mathscr{F}]$ existiert und ist eindeutig (bis auf Gleichheit fast sicher). Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Eindeutigkeit: Nehmen Sie an, dass Y und Y' Definition 1 erfüllen und betrachten Sie die Menge $A := \{Y - Y' > 0\}$.

ii) Existenz: Definieren Sie das Maß Q^+ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ durch $Q^+[A] := E[1_A X^+]$ und analog Q^-. Konstruieren Sie nun die bedingte Erwartung mit dem Satz von Radon-Nikodym, siehe Korollar 5.16 im Skript.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $X \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ und $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$, dann gilt

$$\langle X - E[X|\mathscr{F}], Y\rangle_{L^2} = 0 \quad \text{für alle } Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P). \tag{1}$$

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass die bedingte Erwartung als Abbildung gegeben durch $E[\cdot|\mathscr{F}]\colon L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der Orthogonalprojektion im Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ auf dessen Unterraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entspricht. Insbesondere gilt damit

$$\|X - E[X|\mathscr{F}]\|_{L^2} = \inf_{Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)} \|X - Y\|_{L^2}. \tag{2}$$

Satz 1 (Monotone Klassen). Sei $\mathcal{H}$ eine Menge von beschränkten Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

1. $\mathcal{H}$ ist ein Vektorraum.
2. $\mathcal{H}$ enthält die konstante 1-Funktion
3. $f_n \in \mathcal{H}$ und $f_n \nearrow f$, f beschränkt $\Rightarrow f \in \mathcal{H}$.

Falls $\mathcal{H}$ alle Indikatorfunktionen 1_A für ein schnitt-stabiles Mengensystem $\mathscr{A}$ enthält, dann enthält $\mathcal{H}$ auch alle beschränkten $\sigma(\mathscr{A})$-messbaren Funktionen.

Aufgabe 3 (Bonus 4 Punkte)**.** Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Funktion. Weiter sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X und Y unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie

$$E[g(X,Y)|Y = y] = E[g(X,y)].$$

Definieren Sie zunächst für zwei Zufallsvariablen $Z \in L^1$ mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ und W mit Werten in $(E, \mathscr{E})$ präzise den Ausdruck $E[Z|W = w]$ mithilfe des Faktorisierungslemmas, siehe Lemma 7.2 im Skript. Verwenden Sie dann den Satz über monotone Klassen.