Stochastische Prozesse

Wintersemester 2022/23

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 25.11.2022.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ eine Filtration mit $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, und $S = (S_t)_{t=0,\dots,T}$ ein stochastischer Prozess mit $S_t \geq 0$ für alle $t = 0, \dots, T$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) S ist ein Martingal bezüglich $(\mathbb{F}, Q)$.

ii) Für jedes beschränkte und previsibel H ist $H \cdot S$ ein Martingal bezüglich $(\mathbb{F}, Q)$.

iii) Ist H previsibel und $E_Q[(H \cdot S)_T^-] < \infty$, dann ist $H \cdot S$ ein Martingal bezüglich $(\mathbb{F}, Q)$.

iv) Ist H previsibel und $(H \cdot S)_T \geq -c > -\infty$ Q-a.s. für eine Konstante $c > 0$, dann gilt $E_Q[(H \cdot S)_T] = 0$.

Hinweis: Die Äquivalenz der Aussage i) $\Leftrightarrow$ ii) wurde im Skript bereits in Proposition 14.14 gezeigt (wobei hier H beschränkt in der Annahme fehlt). Zeigen sie nun ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i). Zu ii) $\Rightarrow$ iii) : Zeigen Sie zunächst $E_Q[(H \cdot S)_t^-] < \infty \Rightarrow E_Q[(H \cdot S)_t | \mathscr{F}_{t-1}] = (H \cdot S)_{t-1}$, hierbei dürfen Sie annehmen, dass die bedingte Erwartung einer Zufallsvariablen existiert, falls deren Negativteil integrierbar ist. Zu iv) $\Rightarrow$ i): Zeigen Sie zunächst die Integrierbarkeit von S und dann die Martingaleigenschaft.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ eine Filtration, und $S = (S_t)_{t=0,\dots,T}$ ein stochastischer Prozess stochastischer Prozess mit $S_t \geq 0$ für alle $t = 0, \dots, T$. Wir nehmen an, dass ein Maß $Q \sim P$ existiert, sodass S ein Martingal bezüglich Q ist. Zeigen Sie, dass kein previsibler Prozess existiert, sodass

$$(H \cdot S)_T \geq 0 \ P\text{-f.s. und } P[(H \cdot S)_T > 0] > 0.$$

Aufgabe 3. Sei $I = \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{X}$ ein Sub-Martingal mit Doob-Zerlegung $\mathcal{X} = \mathcal{M} + \mathcal{A}$ in das Martingal $\mathcal{M}$ und den nicht-fallenden, previsiblen Prozess $\mathcal{A}$ nach Proposition 14.9. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{X}$ gleichgradig integrierbar, dann sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{A}$ gleichgradig integrierbar.
Hinweis: Verwenden Sie die Monotonie von $\mathcal{A}$ um zu zeigen, dass ein integrierbarer Grenzwert A_∞ existiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{X} = (X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ eine unabhängige, identische verteilte Familie mit $\mathbf{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Finden Sie fast sicher endliche Stoppzeiten S, T mit $\mathbf{E}[X_S] \neq \mathbf{E}[X_T]$.