

# Erweiterung der Analysis

VON P. PFAFFELHUBER UND E.A. V. HAMMERSTEIN

Version: 18. Oktober 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen der mehrdimensionalen Integration</b>	<b>2</b>
1.1 Integration über Quader . . . . .	2
1.2 Jordan-messbare Punktmengen . . . . .	10
1.3 Integration über Jordan-messbare Mengen . . . . .	14
<b>2 Integralsätze</b>	<b>18</b>
2.1 Der Transformationssatz . . . . .	18
2.2 Weg- oder Kurvenintegrale . . . . .	22
2.3 Oberflächenintegrale . . . . .	27
2.4 Der Satz von Gauß . . . . .	33
2.5 Der Satz von Stokes . . . . .	39
<b>3 Funktionentheorie</b>	<b>44</b>
3.1 Holomorphe Funktionen . . . . .	47
3.2 Der Cauchy'sche Integralsatz . . . . .	51
3.3 Stammfunktionen . . . . .	58
3.4 Die Cauchy'sche Integralformel und einige Folgerungen . . . . .	63

## 1 Grundlagen der mehrdimensionalen Integration

In der Vorlesung Analysis I haben wir die Integration von (stückweise stetigen) Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  über ein Intervall  $[a, b]$  kennengelernt. Die verwendete Notation war damals

$$\int_a^b f(x) dx$$

und ist wohldefiniert, falls die Ober- und Untersummen dieselben Grenzwerte haben. Ist  $f \geq 0$ , entspricht das Integral dem Flächeninhalt der Menge  $\{(x, y) \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Im Folgenden werden wir uns mit der Integration von Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  über einen Bereich  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  beschäftigen. Für  $f \geq 0$  kann dieses Integral als Volumen interpretiert werden.

**Bemerkung 1.1 (Notation).** Wir verwenden die Notation  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  für Vektoren. Wir vereinbaren dabei, dass die Koordinaten von  $\underline{x}$  immer  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  heißen.

### 1.1 Integration über Quader

In diesem Abschnitt wollen wir das (Riemann-)Integral

$$\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x}$$

für einen Quader  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  und eine Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  (mit bestimmten Eigenschaften, unter denen das Integral existiert) definieren. Für  $f \geq 0$  kann diese Zahl, wie oben bemerkt, analog zum Fall  $d = 1$  als Volumen der Menge  $\{(\underline{x}, y) \mid \underline{x} \in Q, 0 \leq y \leq f(\underline{x})\}$  aufgefasst werden. Dabei gehen wir ähnlich wie im Eindimensionalen vor: wir zerlegen  $Q$  in immer kleinere Teilquader, deren maximales Volumen eine Nullfolge bildet. Auf jedem dieser kleinen Quader ist  $f$  annähernd konstant. So können wir eine Obersumme und eine Untersumme bilden, die dann gegeneinander konvergieren.

**Definition 1.2 (Quader).**

1. Für ein Intervall  $I = [a, b]$  oder  $I = [a, b)$  oder  $I = (a, b]$  oder  $I = (a, b)$ , das also abgeschlossen, halboffen oder offen sein kann, schreiben wir  $I = \lceil a, b \rceil$ .
2. Für  $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^d$  mit  $a_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq b_d$  und  $I_k = \lceil a_k, b_k \rceil$ ,  $k = 1, \dots, d$ , heißt

$$\lceil \underline{a}, \underline{b} \rceil := I_1 \times \dots \times I_d$$

$d$ -dimensionaler Quader mit Seitenlängen  $b_1 - a_1, \dots, b_d - a_d$ .

3. Für einen Quader  $Q = I_1 \times \dots \times I_d$  heißt die Zahl

$$\lambda(\lceil \underline{a}, \underline{b} \rceil) := \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

$d$ -dimensionaler (Jordan-)Inhalt oder Volumen von  $\lceil \underline{a}, \underline{b} \rceil$  (und hängt nicht davon ab, ob die  $I_k$  abgeschlossen, halboffen oder offen sind).

**Bemerkung 1.3 (Nicht-überlappende Quader).** Offenbar ist die Menge der Quader schnittstabil, d.h.  $A \cap B$  ist ein (möglicherweise leerer) Quader, falls  $A$  und  $B$  Quader sind. Wir benötigen noch einen Begriff, der beschreibt, dass  $A$  und  $B$  höchstens mit einer Seite aneinander grenzen. So sagen wir, dass zwei Quader  $A$  und  $B$  nicht überlappen, falls  $\lambda(A \cap B) = 0$ .

**Definition 1.4 (Zerlegung eines Quaders).**

1. Seien  $I_1 = [a_1, b_1], \dots, I_d = [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle und  $Q = I_1 \times \dots \times I_d \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Quader. Für  $a_i := x_0^i < x_1^i < \dots < x_{k_i}^i := b_i, i = 1, \dots, d$  heißt

$$\mathcal{P}(Q) := \left\{ \prod_{i=1}^d [x_{\alpha_i-1}^i, x_{\alpha_i}^i] \mid \alpha_i = 1, \dots, k_i, i = 1, \dots, d \right\}$$

eine Zerlegung von  $Q$  in  $k_1 \cdot \dots \cdot k_d$  (nicht-überlappende) Quader mit Zerlegungspunkten  $\{x_0^i, \dots, x_{k_i}^i\}, i = 1, \dots, d$ . Dabei heißt

$$\delta(\mathcal{P}(Q)) := \max \left\{ x_{\alpha_i}^i - x_{\alpha_i-1}^i \mid \alpha_i = 1, \dots, k_i, i = 1, \dots, d \right\}$$

die Feinheit der Zerlegung.

2. Ist  $\mathcal{P}'(Q)$  eine weitere Zerlegung von  $Q$  mit Zerlegungspunkten  $\{y_0^i, \dots, y_{\ell_i}^i\} \supseteq \{x_0^i, \dots, x_{k_i}^i\}, i = 1, \dots, d$ , so heißt  $\mathcal{P}'(Q)$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{P}(Q)$ .

Die gemeinsame Verfeinerung  $\mathcal{P}''(Q)$  zweier Zerlegungen  $\mathcal{P}(Q)$  und  $\mathcal{P}'(Q)$  von  $Q$  ist diejenige Zerlegung, die man aus der Vereinigung der Zerlegungspunkte von  $\mathcal{P}(Q)$  und  $\mathcal{P}'(Q)$  erhält.

**Bemerkung 1.5 (Das Volumen ist invariant gegenüber Zerlegungen).** Für eine Zerlegung  $\mathcal{P}(Q)$  eines Quaders gilt offenbar

$$\lambda(Q) = \sum_{A \in \mathcal{P}(Q)} \lambda(A).$$

**Definition 1.6 (Integrierbare Funktion).** Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Quader.

1. Für einen Quader  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  setzen wir

$$m_A(f) := \inf_{\underline{x} \in A} f(\underline{x}), \quad M_A(f) := \sup_{\underline{x} \in A} f(\underline{x}).$$

2. Sei  $\mathcal{P}(Q)$  eine Zerlegung von  $Q$ . Dann heißen

$$U_{\mathcal{P}(Q)}(f) := \sum_{A \in \mathcal{P}(Q)} m_A(f) \lambda(A), \quad O_{\mathcal{P}(Q)}(f) := \sum_{A \in \mathcal{P}(Q)} M_A(f) \lambda(A)$$

Unter- und Obersumme von  $f$  bezüglich  $\mathcal{P}(Q)$ . Weiter definieren wir das Unter- und Oberintegral von  $f$  als

$$\int_Q^* f(\underline{x}) d\underline{x} := \sup \{ U_{\mathcal{P}(Q)}(f) \mid \mathcal{P}(Q) \text{ Zerlegung von } Q \}.$$

$$\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x} := \inf \{ O_{\mathcal{P}(Q)}(f) \mid \mathcal{P}(Q) \text{ Zerlegung von } Q \}.$$

3. Die Funktion  $f$  heißt über  $Q$  integrierbar, falls

$$\int_Q^* f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_Q f(\underline{x}) d\underline{x}$$

und die linke und die rechte Seite endlich sind. Diese Zahl nennen wir dann auch das (Riemann-)Integral von  $f$  über  $Q$  und schreiben dafür

$$\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

**Bemerkung 1.7 (Integrierbare Funktionen sind beschränkt).** Nach Definition 1.4 besteht jede Zerlegung eines Quaders  $Q$  aus nur endlich vielen Teilquadern. Wäre  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  unbeschränkt, so müsste es in *jeder* Zerlegung  $\mathcal{P}(Q)$  von  $Q$  einen Teilquader  $A \in \mathcal{P}(Q)$  geben mit  $\lambda(A) > 0$  und  $m_A(f) = -\infty$  (und/oder einen Teilquader  $A' \in \mathcal{P}(Q)$  mit  $\lambda(A') > 0$  und  $M_{A'}(f) = +\infty$ ). Dann wären aber das Unter- und/oder das Oberintegral nicht endlich und damit  $f$  nach Definition 1.6 3. nicht integrierbar.

Zur Integration unbeschränkter Funktionen muss der Integralbegriff analog zu den aus Analysis I bekannten „uneigentlichen Integralen“ geeignet erweitert werden.

**Beispiel 1.8.** Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Quader. Dann gilt

$$\int_Q 1 d\underline{x} = \lambda(Q).$$

*Denn:* Welche Zerlegung von  $Q$  wir auch wählen, nach Bemerkung 1.5 ändert dies das Volumen nicht. Insbesondere sind jede Unter- und Obersumme von 1 bezüglich jeder Zerlegung identisch mit  $\lambda(Q)$ . Damit sind Unter- und Oberintegral gerade  $\lambda(Q)$ , und die Behauptung folgt.

Der nächste Satz zeigt, wie man den Wert des Riemann-Integrals konkreter berechnen kann. Obwohl das Resultat eine direkte (und auch intuitiv einleuchtende) Verallgemeinerung des eindimensionalen Falls ist, ist der Beweis nicht ganz einfach.

**Satz 1.9 (Berechnung des Riemann-Integrals).** Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Quader,  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion und  $\mathcal{P}(Q)$  eine Zerlegung von  $Q$  mit Feinheit  $\delta(\mathcal{P}(Q))$ , dann gilt

$$\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x} = \lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} U_{\mathcal{P}(Q)}(f) = \lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} O_{\mathcal{P}(Q)}(f).$$

*Beweis.* Der Satz ist recht einfach zu beweisen unter der Einschränkung, dass man nur Zerlegungsfolgen  $(\mathcal{P}_n(Q))_{n \geq 1}$  von  $Q$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{P}_n(Q)) = 0$  betrachtet, bei denen jeweils  $\mathcal{P}_{n+1}(Q)$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{P}_n(Q)$  gemäß Definition 1.4 ist (Übung).

Im allgemeinen Fall benötigt man zunächst eine Abschätzung, die es ermöglicht, Ober- und Untersummen verschiedener Zerlegungen von  $Q$  miteinander zu vergleichen. Seien dazu  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ ,  $\mathcal{P}(Q) = \{Q_1, \dots, Q_{k_1 \dots k_d}\}$  eine Zerlegung von  $Q$  in  $k_1 \dots k_d$  Teilquader und  $\mathcal{P}'(Q) = \{Q'_1, \dots, Q'_{k'_1 \dots k'_d}\}$  eine andere Zerlegung in  $k'_1 \dots k'_d$  Teilquader. Dann lassen sich die Teilquader  $Q'_k$  der zweiten Zerlegung  $\mathcal{P}'(Q)$  in zwei Klassen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  aufteilen:  $Q'_k \in \mathcal{A}$ , falls es einen Teilquader  $Q_i \in \mathcal{P}(Q)$  aus der ersten Zerlegung gibt, so dass  $Q'_k \subseteq Q_i$ , ansonsten ist  $Q'_k \in \mathcal{B}$ . Letzterer Fall tritt ein, wenn für (mindestens) ein  $1 \leq l \leq d$  folgendes gilt: Sei  $[a_l, b_l] = [a_l, x_1^l] \times [x_1^l, x_2^l] \times \dots \times [x_{k_l-1}^l, b_l]$  die Zerlegung von  $\mathcal{P}(Q)$  der  $l$ -Kante von  $Q$  und  $[a_l, b_l] = [a_l, y_1^l] \times [y_1^l, y_2^l] \times \dots \times [y_{k'_l-1}^l, b_l]$  diejenige von  $\mathcal{P}'(Q)$ , dann muss mindestens einer der Teilungspunkte  $x_i^l$ ,  $1 \leq i \leq k_l - 1$ , im Inneren eines der Zerlegungsintervalle  $[y_j^l, y_{j+1}^l]$  von  $\mathcal{P}'(Q)$  liegen. Da es genau  $k_l - 1$  Teilungspunkte  $x_i^l$  von  $\mathcal{P}(Q)$  im Inneren von  $[a_l, b_l]$  gibt, kann dies höchstens  $k_l - 1$  mal der Fall sein. Dies gilt analog in jeder der  $d$  verschiedenen Richtungen.

Damit können wir das Gesamtvolumen aller Quader  $Q'_k \in \mathcal{B}$  recht grob wie folgt nach oben abschätzen: Entlang jeder Richtung  $1 \leq l \leq d$  findet man, wie gesehen, höchstens  $k_l - 1$  Quader  $Q'_k$ , die in  $\mathcal{B}$  liegen. Deren Kantenlänge in Richtung  $l$  kann höchstens  $\delta(\mathcal{P}'(Q))$  betragen, in alle anderen  $d - 1$  Richtungen schätzen wir die Kantenlängen der  $Q'_k$  ganz einfach durch die Kantenlängen  $b_i - a_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $i \neq l$ , von  $Q$  ab (auch wenn sie dort natürlich ebenfalls nicht länger als  $\delta(\mathcal{P}'(Q))$  sein können). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{Q'_k \in \mathcal{B}} \lambda(Q'_k) &\leq \sum_{l=1}^d (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (k_l - 1) \cdot \delta(\mathcal{P}'(Q)) \cdot \dots \cdot (b_d - a_d) \\ &= \delta(\mathcal{P}'(Q)) \cdot \sum_{l=1}^d (k_l - 1) \frac{\lambda(Q)}{(b_l - a_l)} =: \delta(\mathcal{P}'(Q)) \cdot C(\mathcal{P}(Q)) \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Konstante  $C(\mathcal{P}(Q))$  nur von der Zerlegung  $\mathcal{P}(Q)$  abhängt!

Sei  $M := \sup_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x})$  und  $M'_k := \sup_{\underline{x} \in Q'_k} f(\underline{x})$ , dann gilt trivialerweise  $M'_k \leq M$  für alle  $1 \leq k \leq k'_1 \cdot \dots \cdot k'_d$ , und für die Quader  $Q'_k \in \mathcal{A}$  ist  $M'_k := \sup_{\underline{x} \in Q'_k} f(\underline{x}) \leq M_i := \sup_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x})$ , denn  $Q'_k \subseteq Q_i \in \mathcal{P}(Q)$ . Es kann allerdings sein, dass einige oder sogar alle der Größen  $M'_K, M_i, M$  negativ sind, was bei der untenstehenden Abschätzung zu Problemen führen kann. Daher gehen wir zur Funktion  $\tilde{f}(x) = f(x) - m$  mit  $m := \inf_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x})$  über und beachten, dass  $O_{\mathcal{P}(Q)}(f - m) = O_{\mathcal{P}(Q)}(f) - m\lambda(Q)$  (analog für  $\mathcal{P}'(Q)$ ) und  $M'_k - m, M_i - m, M - m \geq 0$ . Damit können wir nun die Ober- und Untersummen der beiden Partitionen  $\mathcal{P}(Q)$  und  $\mathcal{P}'(Q)$  miteinander vergleichen; es gilt

$$\begin{aligned} O_{\mathcal{P}'(Q)}(f - m) &= \sum_{j=1}^{k'_1 \cdot \dots \cdot k'_d} (M'_j - m)\lambda(Q'_j) = \sum_{Q'_j \in \mathcal{A}} (M'_j - m)\lambda(Q'_j) + \sum_{Q'_j \in \mathcal{B}} (M'_j - m)\lambda(Q'_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_1 \cdot \dots \cdot k_d} (M_i - m)\lambda(Q_i) + (M - m) \cdot \sum_{Q'_j \in \mathcal{B}} \lambda(Q'_j) \\ &\leq O_{\mathcal{P}(Q)}(f - m) + (M - m) \cdot \delta(\mathcal{P}'(Q)) \cdot C(\mathcal{P}(Q)), \end{aligned}$$

und Addition von  $m\lambda(Q)$  auf beiden Seiten ergibt schließlich die gesuchte Abschätzung

$$O_{\mathcal{P}'(Q)}(f) \leq O_{\mathcal{P}(Q)}(f) + (M - m) \cdot \delta(\mathcal{P}'(Q)) \cdot C(\mathcal{P}(Q)).$$

Für die Untersummen erhält man ganz analog

$$U_{\mathcal{P}'(Q)}(f) \geq U_{\mathcal{P}(Q)}(f) + (m - M) \cdot \delta(\mathcal{P}'(Q)) \cdot C(\mathcal{P}(Q)).$$

Nach der Definition des Oberintegrals muss es eine Folge von Zerlegungen  $(\mathcal{P}_\ell^*(Q))_{\ell \geq 1}$  des Quaders  $Q$  geben, so dass

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} O_{\mathcal{P}_\ell^*(Q)}(f) = \int_Q^* f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_Q f(\underline{x}) d\underline{x}$$

(die letzte Gleichung gilt, da  $f$  als integrierbar vorausgesetzt wurde). Sei nun  $(\mathcal{P}_n(Q))_{n \geq 1}$  eine andere Folge von Zerlegungen von  $Q$ , deren Feinheiten mit wachsendem  $n$  gegen 0 konvergieren. Dann gilt für beliebige  $\ell, n \geq 1$  nach der oben erhaltenen Abschätzung

$$\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x} \leq O_{\mathcal{P}_n(Q)}(f) \leq O_{\mathcal{P}_\ell^*(Q)}(f) + (M - m) \cdot \delta(\mathcal{P}_n(Q)) \cdot C(\mathcal{P}_\ell^*(Q)).$$

Wegen  $\delta(\mathcal{P}_n(Q)) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$\int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} O_{\mathcal{P}_n(Q)}(f) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} O_{\mathcal{P}_n(Q)}(f) \leq O_{\mathcal{P}_\ell^*(Q)}(f)$$

für jedes  $\ell \geq 1$ . (Wir wissen an dieser Stelle noch nicht, ob  $\lim_{n \rightarrow \infty} O_{\mathcal{P}_n(Q)}(f)$  existiert, daher müssen wir uns zunächst auf die stets wohldefinierten  $\liminf$  und  $\limsup$  beschränken.) Lassen wir nun auch  $\ell \rightarrow \infty$  gehen, ergibt sich

$$\int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} O_{\mathcal{P}_n(Q)}(f) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} O_{\mathcal{P}_n(Q)}(f) \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} O_{\mathcal{P}_\ell^*(Q)}(f) = \int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x},$$

also gilt überall  $=$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} O_{\mathcal{P}_n(Q)}(f) = \int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x}$  für jede Folge  $(\mathcal{P}_n(Q))_{n \geq 1}$  mit  $\delta(\mathcal{P}_n(Q)) \rightarrow 0$ . Die Behauptung für die Untersummen zeigt man ganz analog mit der obigen Abschätzung für die Untersummen zweier verschiedener Zerlegungen.  $\square$

**Satz 1.10 (Stetige Funktionen sind integrierbar).** *Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  ein kompakter Quader und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  über  $Q$  integrierbar.*

*Beweis.* Da  $Q$  als kompakte Menge abgeschlossen und  $f$  stetig ist, ist  $f$  auf  $Q$  gleichmäßig stetig, beschränkt und nimmt sein Minimum  $m := \min_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x})$  sowie sein Maximum  $M := \max_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x})$  an, und aus Definition 1.6 sowie Beispiel 1.8 folgt

$$-\infty < m\lambda(Q) \leq U_{\mathcal{P}(Q)}(f) \leq O_{\mathcal{P}(Q)}(f) \leq M\lambda(Q) < \infty$$

für jede Zerlegung  $\mathcal{P}(Q)$  von  $Q$ . Somit sind die Mengen der Unter- und Obersummen beschränkt und damit Unter- und Oberintegral wohldefiniert und endlich. Aus dem Beweis von Satz 1.9 folgt, dass

$$\lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} U_{\mathcal{P}(Q)}(f) = \int_Q^* f(\underline{x}) \, d\underline{x} \quad \text{und} \quad \lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} O_{\mathcal{P}(Q)}(f) = \int_Q^* f(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann existiert wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  ein  $\delta' > 0$ , so dass für alle Zerlegungen  $\mathcal{P}(Q)$  mit  $\delta(\mathcal{P}(Q)) < \delta'$  gilt  $M_A(f) - m_A(f) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda(Q)}$  für alle  $A \in \mathcal{P}(Q)$ . Daraus folgt  $O_{\mathcal{P}(Q)}(f) - U_{\mathcal{P}(Q)}(f) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda(Q)}\lambda(Q) = \varepsilon$  und damit

$$\int_Q^* f(\underline{x}) \, d\underline{x} = \lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} U_{\mathcal{P}(Q)}(f) = \lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} O_{\mathcal{P}(Q)}(f) = \int_Q^* f(\underline{x}) \, d\underline{x},$$

also ist  $f$  integrierbar.  $\square$

**Bemerkung 1.11 (Stückweise Stetigkeit).** Aus der Analysis I ist bekannt, dass eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  über ein Intervall  $I$  bereits dann integrierbar ist, wenn sie stückweise stetig ist. Für  $d > 1$  ist dies schwieriger zu formulieren, da zunächst nicht klar ist, was dort *stückweise stetig* überhaupt bedeuten soll. Dies werden wir später beantworten (vgl. Bemerkung 1.34).

Viele weitere Eigenschaften des Integrals übertragen sich (mit Hilfe von Satz 1.9) direkt aus dem eindimensionalen Fall. Die folgenden Resultate geben wir deshalb ohne Beweis an.

**Satz 1.12 (Eigenschaften des Riemann-Integrals).** *Seien  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Quader und die Funktionen  $f, g, f_1, f_2, \dots : Q \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann gilt:*

1. Die Funktionen  $f^+ = \max(f, 0)$ ,  $f^- = \max(-f, 0)$  und  $|f|$  sind integrierbar.
2. Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g$  integrierbar mit

$$\int_Q (\alpha f + \beta g)(\underline{x}) \, d\underline{x} = \alpha \int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x} + \beta \int_Q g(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

3. Die Funktion  $fg$  ist integrierbar. Gibt es außerdem ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $g \geq c > 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  integrierbar.

4. Ist  $f \leq g$ , so ist auch

$$\int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \int_Q g(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

Insbesondere gilt

$$\left| \int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x} \right| \leq \int_Q |f(\underline{x})| \, d\underline{x}.$$

5. Gilt  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$  gleichmäßig für ein  $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist  $h$  integrierbar mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q f_n(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_Q h(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

Eine weitere Eigenschaft des Riemann-Integrals ist, dass man es auch als Grenzwert von Riemann-Summen erhalten kann. Diese gilt auch im Mehrdimensionalen.

**Proposition 1.13 (Riemann-Summen und Integrierbarkeit).** Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Quader und  $\mathcal{P}(Q)$  eine Zerlegung von  $Q$ , sowie  $\xi_A \in A$  für jedes  $A \in \mathcal{P}(Q)$  und  $\underline{\xi} = (\xi_A)_{A \in \mathcal{P}(Q)}$ . Wir definieren die Riemann-Summe durch

$$S_{\mathcal{P}(Q)}(f, \underline{\xi}) := \sum_{A \in \mathcal{P}(Q)} f(\xi_A) \lambda(A).$$

Dann gilt: Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann über einen Quader  $Q$  integrierbar, wenn  $\lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} S_{\mathcal{P}(Q)}(f, \underline{\xi})$  existiert. In diesem Fall gilt

$$\int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x} = \lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} S_{\mathcal{P}(Q)}(f, \underline{\xi}).$$

*Beweis.* Sei zunächst  $f$  integrierbar,  $\mathcal{P}(Q)$  eine Zerlegung von  $Q$  und  $\xi_A \in A$  für  $A \in \mathcal{P}(Q)$ . Dann gilt

$$U_{\mathcal{P}(Q)}(f) \leq S_{\mathcal{P}(Q)}(f, \underline{\xi}) \leq U_{\mathcal{P}(Q)}(f).$$

Für  $\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0$  konvergieren nach Satz 1.9 die linke und rechte Seite gegen  $\int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x}$ , also gilt auch  $\lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} S_{\mathcal{P}(Q)}(f, \underline{\xi}) = \int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x}$ .

Konvergiert andersherum  $\lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} S_{\mathcal{P}(Q)}(f, \underline{\xi})$ , so muss dies unabhängig von der Wahl von  $\xi$  geschehen (denn die Wahl der Stützpunkte  $\xi_A$  war beliebig). Nun stellen wir fest, dass für  $\zeta_A := \operatorname{argmin}_{\underline{x} \in A} f(\underline{x})$  und  $\eta_A := \operatorname{argmax}_{\underline{x} \in A} f(\underline{x})$  gerade  $U_{\mathcal{P}(Q)}(f) = S_{\mathcal{P}(Q)}(f, \underline{\zeta})$  und  $O_{\mathcal{P}(Q)}(f) = S_{\mathcal{P}(Q)}(f, \underline{\eta})$ . Insbesondere folgt aus der Konvergenz der Riemann-Summen auch  $\lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} U_{\mathcal{P}(Q)}(f) = \lim_{\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0} O_{\mathcal{P}(Q)}(f) = \int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x}$ .  $\square$

Als ersten wichtigen Satz der mehrdimensionalen Integration geben wir ein nützliches Hilfsmittel an, mit dem man Integrale einfacher als mit Satz 1.9 berechnen kann. Für  $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$  setzen wir dazu  $\underline{x}_{-k} := (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  und  $Q_{-k} := \times_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^d [a_i, b_i]$ .

**Satz 1.14 (Satz von Fubini).** Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  über dem Quader

$$Q = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$$

integrierbar. Dann gilt:

1. Existiert für jedes  $x_k \in [a_k, b_k]$  das Integral

$$\int_{Q_{-k}} f(\underline{x}) d\underline{x}_{-k},$$

so ist

$$\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{a_k}^{b_k} \left( \int_{Q_{-k}} f(\underline{x}) d\underline{x}_{-k} \right) dx_k.$$

Insbesondere existiert das iterierte Integral auf der rechten Seite.

2. Existiert das Integral

$$\int_{a_k}^{b_k} f(\underline{x}) dx_k$$

für jedes  $\underline{x}_{-k} \in Q_{-k}$ , dann ist

$$\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{Q_{-k}} \left( \int_{a_k}^{b_k} f(\underline{x}) dx_k \right) d\underline{x}_{-k}.$$

Insbesondere existiert das iterierte Integral auf der rechten Seite.

*Beweis.* Wir beweisen hier nur 1., der Beweis von 2. ist vollkommen analog. Zur Vereinfachung der Notation sei o.B.d.A.  $k = 1$ . Wir setzen

$$F(x_1) = \int_{Q_{-1}} f(x_1, \underline{x}_{-1}) d\underline{x}_{-1},$$

was nach Voraussetzung für alle  $x_1 \in [a_1, b_1]$  existiert. Seien  $a_1 =: y_0 < y_1 < \dots < y_m := b_1$ ,  $\mathcal{P}(Q_{-1}) = \{Q_{-1}^1, \dots, Q_{-1}^n\}$  eine Zerlegung von  $Q_{-1}$  sowie  $\mathcal{P}(Q) = \{Q_{ij} := [y_{i-1}, y_i] \times Q_{-1}^j, i = 1 \leq m, j = 1, \dots, n\}$  die entsprechende Zerlegung von  $Q$ . Außerdem sei

$$m_{ij} := \inf_{\underline{x} \in Q_{ij}} f(\underline{x}), \quad M_{ij} := \sup_{\underline{x} \in Q_{ij}} f(\underline{x}).$$

Wir beweisen die Aussage mit Hilfe von Proposition 1.13. Seien hierzu  $\xi_i \in [y_{i-1}, y_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Durch Integration über  $Q_{-1}^j$  ergibt sich nach Satz 1.12 4.

$$m_{ij} \lambda_{d-1}(Q_{-1}^j) \leq \int_{Q_{-1}^j} f(\xi_i, \underline{x}_{-1}) d\underline{x}_{-1} \leq M_{ij} \lambda_{d-1}(Q_{-1}^j),$$

wobei wir die Integrierbarkeitsvoraussetzung benutzt haben und  $\lambda_{d-1}$  den Jordan-Inhalt auf  $\mathbb{R}^{d-1}$  bezeichne. Wir multiplizieren beide Seiten mit  $(y_i - y_{i-1})$ . Summation liefert dann

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{P}(Q)}(f) &= \sum_{i,j} m_{ij} \lambda(Q_{ij}) \leq \sum_{i,j} \int_{Q_{-1}^j} f(\xi_i, \underline{x}_{-1}) d\underline{x}_{-1} (y_i - y_{i-1}) = \sum_i \int_{Q_{-1}} f(\xi_i, \underline{x}_{-1}) d\underline{x}_{-1} (y_i - y_{i-1}) \\ &= \sum_i F(\xi_i) (y_i - y_{i-1}) = \sum_{i,j} \int_{Q_{-1}^j} f(\xi_i, \underline{x}_{-1}) d\underline{x}_{-1} (y_i - y_{i-1}) \leq \sum_{i,j} M_{ij} \lambda(Q_{ij}) = O_{\mathcal{P}(Q)}(f). \end{aligned}$$



Für  $\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0$  konvergieren dann wegen der Integrierbarkeit von  $f$  nach Satz 1.9 die Ober- und Untersummen gegen  $\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x}$  und somit nach Proposition 1.13 die zwischenstehende Riemannsumme gegen  $\int_{a_1}^{b_1} F(x_1) dx_1$ , so dass man insgesamt erhält

$$\int_Q f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{a_1}^{b_1} F(x_1) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{Q_{-1}} f(x_1, \underline{x}_{-1}) d\underline{x}_{-1} dx_1$$

wie gewünscht.  $\square$

**Beispiel 1.15.** Wir wollen die Funktion  $f : (x, y) \mapsto x^y$  über  $Q = [0, 1]^2$  integrieren. Da  $f$  stetig und auf  $Q$  durch 0 und 1 beschränkt ist, ist  $f$  über  $Q$  integrierbar nach Satz 1.10. Das Integral stimmt ferner nach Satz 1.14 mit den beiden iterierten Integralen überein, da jeweils die inneren Integrale existieren, wie wir gleich sehen werden. Für die iterierten Integrale gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 x^y dy dx &= \int_0^1 \int_0^1 e^{y \log(x)} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{\log(x)} e^{y \log(x)} \Big|_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \frac{x-1}{\log(x)} dx, \\ \int_0^1 \int_0^1 x^y dx dy &= \int_0^1 \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_{x=0}^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{y+1} dy = \log(2). \end{aligned}$$

Daraus folgt nicht nur, dass das Integral von  $f$  über  $Q$  gerade  $\log(2)$  ist, sondern auch

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x-1}{\log(x)} dx &\stackrel{z=\frac{1}{x}}{=} \int_1^\infty -\frac{\frac{1}{z}-1}{z^2 \log(z)} dz = \int_1^\infty \frac{z-1}{z^3 \log(z)} dz \\ &\stackrel{t=\log(z)}{=} \int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-e^{-t})}{t} dt = \log(2). \end{aligned}$$

**Beispiel 1.16.** Wir betrachten nun die Funktion

$$f : \begin{cases} Q := [0, 1]^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} 2x, & y \in \mathbb{Q}, \\ 1, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{cases}$$

Aus der Definition von  $f$  folgt

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 2x dx = 1, & y \in \mathbb{Q} \\ \int_0^1 1 dx = 1, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

und damit

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 1 dy = 1.$$

Allerdings folgt hieraus nicht, dass  $\int_Q f(x, y) d(x, y) = 1$ , da  $f$  selbst nicht über  $Q$  integrierbar ist (da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  liegt, ist das Oberintegral von  $f$  über  $Q$  gleich  $\frac{5}{4}$  und das Unterintegral gleich  $\frac{3}{4}$ ). Aus analogen Gründen existiert auch nicht

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 (2x \cdot 1_{y \in \mathbb{Q}} + 1_{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}) dy$$

(außer für  $x = \frac{1}{2}$ ), so dass das iterierte Integral  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$  ebenfalls nicht existiert. Man sieht hier insbesondere, dass man aus der Existenz eines iterierten Integrals nicht auf die Integrierbarkeit von  $f$  über  $Q$  schließen kann!

## 1.2 Jordan-messbare Punktmengen

Bislang haben wir eine Funktion über einen Quader integriert. In der Praxis ist es jedoch oft nötig, über allgemeinere Mengen zu integrieren. In diesem Abschnitt werden wir genau die Mengen identifizieren, über die wir später Integrale definieren können. Dies sind die (Jordan-)messbaren Mengen. Als ersten Schritt erweitern wir unser Spektrum von Quadern auf Quadersummen.

**Definition 1.17 (Quadersumme).** *Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt Quadersumme, falls es Quader  $Q_1, \dots, Q_n$  gibt (nicht notwendigerweise disjunkt), so dass  $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$ .*

**Proposition 1.18 (Eigenschaften von Quadersummen).**

1. Seien  $A$  und  $A'$  Quadersummen, dann sind auch  $A \cup A'$ ,  $A \cap A'$  und  $A \setminus A'$  Quadersummen.
2. Sei  $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$  eine Quadersumme. Dann gibt es disjunkte Quader  $Q'_1, \dots, Q'_m$ , so dass  $A = Q'_1 \cup \dots \cup Q'_m$ . Weiter können  $Q'_1, \dots, Q'_m$  so gewählt werden, dass es für jedes  $i$  ein  $J_i \subseteq \{1, \dots, m\}$  gibt mit  $Q_i = \bigcup_{j \in J_i} Q'_j$ .

*Beweis.* Aus Definition 1.17 folgt direkt, dass auch  $A \cup A'$  eine Quadersumme ist. Da nach Bemerkung 1.3 Quader schnittstabil sind, ist auch  $A \cap A'$  eine Quadersumme. Da stets  $Q_i \cap Q'_j$  ein in  $Q_i$  enthaltener Quader ist, sieht man leicht (Zeichnung), dass man  $Q_i \cap Q'_j$  zu einer disjunkten Zerlegung von  $Q_i$  ergänzen kann. Daraus ergeben sich die übrigen Aussagen.  $\square$

**Definition 1.19 (Inhalt einer Quadersumme).** *Seien  $A$  eine Quadersumme und  $Q_1, \dots, Q_m$  disjunkte Quader mit  $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$ . Dann definieren wir den (Jordan-)Inhalt bzw. das Volumen der Quadersumme als  $\lambda(A) = \lambda(Q_1) + \dots + \lambda(Q_m)$ .*

Da die Darstellung einer Quadersumme als Vereinigung disjunkter Quader nicht eindeutig ist, stellt sich die Frage nach der Wohldefiniertheit des Inhalts einer Quadersumme.

**Lemma 1.20.** *Der (Jordan-)Inhalt von Quadersummen ist wohldefiniert.*

*Beweis.* Seien  $Q_1, \dots, Q_m$  und  $Q'_1, \dots, Q'_n$  jeweils disjunkte Quader, so dass  $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_m = Q'_1 \cup \dots \cup Q'_n$ . Dann gilt wegen Bemerkung 1.5 und  $Q_i = Q_i \cap A = (Q_i \cap Q'_1) \cup \dots \cup (Q_i \cap Q'_n)$

$$\sum_{i=1}^m \lambda(Q_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda(Q_i \cap Q'_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda(Q_i \cap Q'_j) = \sum_{j=1}^n \lambda(Q'_j).$$

Damit ist die Wohldefiniertheit gezeigt.  $\square$

**Proposition 1.21 (Eigenschaften des Inhaltes von Quadersummen).** *Seien  $A$  und  $B$  Quadersummen.*

1. Sind  $Q_1, \dots, Q_n$  Quader mit  $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$ , so ist  $\lambda(A) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(Q_i)$ .
2. Ist  $A \subseteq B$ , so existiert eine zu  $A$  disjunkte Quadersumme  $C$  mit  $A \cup C = B$  und  $\lambda(A) + \lambda(C) = \lambda(B)$ . Insbesondere gilt  $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ .
3. Es gilt  $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$ .
4. Sind  $A$  und  $B$  disjunkt, so gilt  $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ .

*Beweis.*

4.: Ist  $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$  mit disjunkten Quadern  $Q_1, \dots, Q_n$  und  $B = Q'_1 \cup \dots \cup Q'_m$  mit disjunkten Quadern  $Q'_1, \dots, Q'_m$ , so sind nach Voraussetzung  $Q_1, \dots, Q_n, Q'_1, \dots, Q'_m$  disjunkt mit Vereinigung  $A \cup B$ . Daraus folgt  $\lambda(A \cup B) = \sum_{i=1}^n \lambda(Q_i) + \sum_{j=1}^m \lambda(Q'_j) = \lambda(A) + \lambda(B)$ .

2.: Es ist  $C := B \setminus A$  die gesuchte Quadersumme (vgl. Proposition 1.18 1.). Die Gleichheit folgt aus 4.

3.: Wegen 4. und 2. ist  $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$ .

1.: Wir zeigen die Aussage nur für  $n = 2$ , der allgemeine Fall folgt analog. Wir schreiben mit 4. und 2.  $\lambda(A) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2 \setminus Q_1) \leq \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2)$ .  $\square$

Wir kommen nun zur Definition von (Jordan-)messbaren Mengen.

**Definition 1.22 (Jordan-messbare Mengen und deren Inhalt).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  eine beschränkte Menge. Dann definieren wir den inneren Jordan-Inhalt

$$\lambda_*(A) := \sup\{\lambda(S) \mid S \text{ Quadersumme, } S \subseteq A\} \quad (1.1)$$

und den äußeren Jordan-Inhalt

$$\lambda^*(A) := \inf\{\lambda(S) \mid S \text{ Quadersumme, } S \supseteq A\}.$$

Gilt  $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$ , so heißt  $A$  Jordan-messbar, und  $\lambda(A) := \lambda_*(A) = \lambda^*(A)$  heißt der (Jordan-)Inhalt oder das Volumen von  $A$ . Gilt  $\lambda(A) = 0$ , so heißt  $A$  auch (Jordan-)Nullmenge.

**Bemerkung 1.23.** Eine beschränkte Menge  $A$  ist genau dann eine Nullmenge, falls  $\lambda^*(A) = 0$ . In diesem Fall ist sie auch Jordan-messbar.

**Beispiel 1.24.**

1. Sei  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  die Kreislinie im  $\mathbb{R}^2$ . Da der Kreisumfang  $2\pi$  beträgt, kann diese mit höchstens  $n$  Quadraten mit Seitenlänge  $\frac{2\pi}{n}$  überdeckt werden. Da jedes dieser Quadrate das Volumen  $\frac{4\pi^2}{n^2}$  hat, ist der äußere Inhalt von  $A$  höchstens  $\frac{4\pi^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Also ist  $A$  eine Jordan-Nullmenge.
2. Etwas allgemeiner als in 1. kann man sagen, dass Linien eine Fläche (so kann man den Inhalt für  $d = 2$  auch nennen) von 0 haben. Analog sieht man, dass Flächen kein Volumen im  $\mathbb{R}^3$  haben etc.
3. Sei  $d = 1$  und  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  (also beschränkt). Dann ist  $A$  nicht Jordan-messbar, denn man sieht leicht, dass der äußere Inhalt immer 1 ist und der innere Inhalt immer 0.

Die folgende Proposition zeigt, dass es noch weitere Möglichkeiten gibt, den inneren und äußeren Inhalt einer Menge zu berechnen.

**Proposition 1.25.** Für eine beschränkte Menge  $A$  und einen Quader  $Q \supseteq A$  gilt

$$\lambda_*(A) = \sup \left\{ \sum_{Q_k \subseteq A} \lambda(Q_k) \mid \{Q_1, \dots, Q_m\} \text{ Zerlegung von } Q \right\},$$

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{Q_k \cap A \neq \emptyset} \lambda(Q_k) \mid \{Q_1, \dots, Q_m\} \text{ Zerlegung von } Q \right\}$$

sowie<sup>1</sup>

$$\lambda_*(A) = \int_Q^* 1_A(\underline{x}) d\underline{x}, \quad \lambda^*(A) = \int_Q^* 1_A(\underline{x}) d\underline{x}.$$

*Beweis.* Wir beweisen die Aussagen nur für den äußeren Jordan-Inhalt, da die analogen Aussagen für den inneren Jordan-Inhalt genauso gezeigt werden können. Für die erste Gleichheit bemerken wir, dass jede Zerlegung von  $Q$  in Quader  $Q_1, \dots, Q_m$  eine Quadersumme  $S = \bigcup_{i=1}^m Q_i \supseteq A$  zulässt. Andersherum lässt sich jede Quadersumme  $S \supseteq A$  zu einer Zerlegung von  $Q$  ergänzen. Dies zeigt, dass die Mengen, über die jeweils ein Infimum gebildet wird, identisch sind.

Für die zweite Gleichheit beachte man, dass für eine Zerlegung  $\mathcal{P}(Q)$

$$O_{\mathcal{P}(Q)}(1_A) = \sum_{B \in \mathcal{P}(Q)} \sup_{x \in B} 1_A(x) \lambda(B) = \sum_{B \in \mathcal{P}(Q)} 1_{A \cap B \neq \emptyset} \lambda(B) = \sum_{B \in \mathcal{P}(Q), A \cap B \neq \emptyset} \lambda(B)$$

gilt. Die rechte Seite fällt offensichtlich monoton, wenn die Feinheit  $\delta(\mathcal{P}(Q))$  der Zerlegung kleiner wird. Lässt man nun  $\delta(\mathcal{P}(Q)) \rightarrow 0$  gehen, so konvergiert die rechte Seite wegen der Monotonie und dem schon bewiesenen ersten Teil gegen  $\lambda^*(A)$  und die linke Seite nach dem Beweis von Satz 1.9 gegen das Oberintegral der Funktion  $1_A$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Bemerkung 1.26.** Aus dem letzten Teil von Proposition 1.25 folgt zusammen mit Definition 1.22, dass die Jordan-messbaren Mengen genau diejenigen beschränkten Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  sind, deren Indikatorfunktionen  $1_A$  Riemann-integrierbar sind.

**Lemma 1.27 (Elementare Eigenschaften des inneren und äußeren Jordan-Inhaltes).** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ .

1. Es gilt  $0 \leq \lambda_*(A) \leq \lambda^*(A) < \infty$ .
2. Falls  $A \subseteq B$ , so ist  $\lambda_*(A) \leq \lambda_*(B)$  und  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ .
3. Es gilt<sup>2</sup>  $\lambda_*(A) = \lambda_*(A^\circ)$  und  $\lambda^*(A) = \lambda^*(\bar{A})$ .
4. Ist  $A$  messbar, so gilt  $\lambda(A) = \lambda(B)$  für jedes  $A^\circ \subseteq B \subseteq \bar{A}$ . Insbesondere ist  $\lambda(A^\circ) = \lambda(\bar{A})$ .
5. Es gilt  $\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ .
6. Falls  $A \cap B = \emptyset$ , so ist  $\lambda_*(A \cup B) = \lambda_*(A) + \lambda_*(B)$ .

*Beweis.*

1.: Da für Quadersummen  $S, S'$  mit  $S \subseteq A \subseteq S'$  nach Proposition 1.21 2. gilt  $\lambda(S) \leq \lambda(S')$ , folgt  $\sup_{S \subseteq A} \lambda(S) = \lambda_*(A) \leq \lambda(S')$  und damit ebenso  $\lambda_*(A) \leq \inf_{S' \supseteq A} \lambda(S') = \lambda^*(A)$ .

<sup>1</sup>Wir erinnern an die Definition

$$1_A(\underline{x}) := \begin{cases} 1, & \underline{x} \in A, \\ 0, & \underline{x} \notin A. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Für  $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$  und die euklidische Norm  $\|\cdot\|$  sei  $B_\varepsilon(\underline{x}) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - y\| < \varepsilon\}$  der (offene) Ball um  $\underline{x}$  mit Radius  $\varepsilon$ . Aus Analysis II ist Folgendes bekannt: Für eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ist  $A^\circ := \{\underline{x} \in A \mid \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq A\} = \bigcup_{B \subseteq A \text{ offen}} B$  das Innere von  $A$ . Weiter ist  $\bar{A} := ((A^c)^\circ)^c = \bigcap_{B \supseteq A \text{ abgeschlossen}} B$  der Abschluss von  $A$ . Genau dann ist  $A$  offen, wenn  $A = A^\circ$ , und genau dann abgeschlossen, wenn  $A = \bar{A}$ . Weiter heißt  $\partial A := \bar{A} \setminus A^\circ$  der Rand von  $A$ .  $\underline{x} \in \partial A$  genau dann, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, dass  $B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A \neq \emptyset$  und  $B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A^c \neq \emptyset$ .

2.: Da jede Quadersumme  $S$  mit  $S \subseteq A$  auch  $S \subseteq B$  erfüllt, folgt die erste Aussage daraus, dass bei der Berechnung von  $\lambda_*(B)$  ein Supremum über eine größere Menge gebildet wird als bei der Berechnung von  $\lambda_*(A)$ . Analog argumentiert man für  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ .

3.: Für jede Quadersumme  $S$  ist  $S^\circ$  ebenfalls eine Quadersumme und  $\lambda(S) = \lambda(S^\circ)$  nach Definition 1.2 3., Proposition 1.18 2. und Proposition 1.21 4. Damit folgt

$$\lambda_*(A) = \sup\{\lambda(S) \mid S \text{ Quaders.}, S \subseteq A\} = \sup\{\lambda(S) \mid S \text{ Quaders.}, S \subseteq A^\circ\} = \lambda_*(A^\circ).$$

Analog folgt  $\lambda^*(A) = \lambda^*(\bar{A})$ .

4.: Es gilt mit 3. und 2.

$$\lambda(A) = \lambda_*(A) = \lambda_*(A^\circ) \leq \lambda_*(B) \leq \lambda^*(B) \leq \lambda^*(\bar{A}) = \lambda^*(A) = \lambda(A),$$

also gilt überall Gleichheit, und die Aussage folgt.

5.: Zunächst bemerken wir, dass für das Oberintegral

$$\int_Q^* (f+g)(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \int_Q^* f(\underline{x}) \, d\underline{x} + \int_Q^* g(\underline{x}) \, d\underline{x}$$

für beliebige Funktionen  $f$  und  $g$  gilt, da  $M_A(f+g) \leq M_A(f) + M_A(g)$  für jede beliebige Menge  $A$ . Wir schreiben also für einen Quader  $Q \supseteq A \cup B$  nach Proposition 1.25

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \cup B) &= \int_Q^* 1_{A \cup B}(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \int_Q^* 1_A(\underline{x}) + 1_B(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \int_Q^* 1_A(\underline{x}) \, d\underline{x} + \int_Q^* 1_B(\underline{x}) \, d\underline{x} \\ &= \lambda^*(A) + \lambda^*(B), \end{aligned}$$

wobei wir die Monotonie des Oberintegrals ausgenutzt haben.

6.: Für beliebige Funktionen  $f, g$  und Mengen  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  gilt, dass  $m_S(f+g) \geq m_S(f) + m_S(g)$ . Falls  $S \subseteq A \cup B$  und  $A, B$  disjunkt sind, gilt sogar  $m_S(1_A + 1_B) = m_S(1_A) + m_S(1_B)$  (\*), also folgt, erneut mit Hilfe von Proposition 1.25, für einen Quader  $Q \supseteq A \cup B$

$$\begin{aligned} \lambda_*(A \cup B) &= \int_Q^* 1_{A \cup B}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_Q^* 1_A(\underline{x}) + 1_B(\underline{x}) \, d\underline{x} \stackrel{(*)}{=} \int_Q^* 1_A(\underline{x}) \, d\underline{x} + \int_Q^* 1_B(\underline{x}) \, d\underline{x} \\ &= \lambda_*(A) + \lambda_*(B). \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.28.** *Eine beschränkte Menge  $A$  ist genau dann Jordan-messbar, wenn  $\partial A$  eine Jordan-Nullmenge ist.*

*Beweis.* Seien  $A$  Jordan-messbar,  $Q \supseteq A$  ein Quader sowie  $\varepsilon > 0$ . Nach Lemma 1.27 4. gilt  $\lambda^*(\bar{A}) = \lambda_*(A^\circ)$ , daher existiert nach Proposition 1.25 eine Zerlegung  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$  von  $Q$ , so dass  $\sum_{k \mid Q_k \cap \bar{A} \neq \emptyset} \lambda(Q_k) - \sum_{k \mid Q_k \subseteq A^\circ} \lambda(Q_k) = \sum_{k \mid Q_k \cap \bar{A} \neq \emptyset, Q_k \cap (A^\circ)^c \neq \emptyset} \lambda(Q_k) < \varepsilon$ .

Wegen  $\bar{A} \subseteq \bigcup_{k \mid Q_k \cap \bar{A} \neq \emptyset} Q_k$  und  $A^\circ \supseteq \bigcup_{k \mid Q_k \subseteq A^\circ} Q_k$  folgt, dass  $\lambda^*(\partial A) = \int_Q^* 1_{\bar{A} \setminus A^\circ}(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \lambda^*(\bigcup_{k \mid Q_k \cap \bar{A} \neq \emptyset, Q_k \cap (A^\circ)^c \neq \emptyset} Q_k) < \varepsilon$  wegen der Monotonie des Oberintegrals. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt, dass  $\lambda^*(\partial A) = 0$  und somit  $\partial A$  eine Jordan-Nullmenge ist.

Ist umgekehrt  $\partial A$  eine Jordan-Nullmenge, gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Quadersumme  $R \supseteq \partial A$  mit  $\lambda(R) < \varepsilon$ . Wir bemerken, dass  $A \cup R$  und  $A \setminus R$  wieder Quadersummen sind. Daher gilt

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) - \lambda_*(A) &= \inf\{\lambda(S) \mid S \supseteq A \text{ Quadersumme}\} - \sup\{\lambda(S) \mid S \subseteq A \text{ Quadersumme}\} \\ &\leq \inf\{\lambda(S) \mid S \supseteq A \cup R \text{ Quadersumme}\} - \sup\{\lambda(S) \mid S \subseteq A \setminus R \text{ Quadersumme}\} \\ &= \lambda(A \cup R) - \lambda(A \setminus R) = \lambda(R) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Aussage. □

**Korollar 1.29 (Vereinigung, Durchschnitt und Differenz messbarer Mengen sind messbar).** Seien  $A_1, \dots, A_n$  Jordan-messbar. Dann sind  $A_1 \cap \dots \cap A_n$ ,  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  und  $A_1 \setminus A_2$  Jordan-messbar.

*Beweis.* Wir zeigen alle Aussagen nur für  $n = 2$ , der allgemeine Fall für Vereinigungen und Durchschnitte folgt dann mit Induktion. Nach Proposition 1.28 sind  $A_1 \cup A_2$ ,  $A_1 \cap A_2$  und  $A_1 \setminus A_2$  Jordan-messbar, falls ihre Ränder Jordan-Nullmengen sind. Nach Bemerkung 1.23 und Lemma 1.27 2. genügt dazu der Nachweis, dass alle diese Ränder in  $\partial A_1 \cup \partial A_2$  enthalten sind. Dies ist aber leicht einzusehen: Sei  $\underline{x} \in \partial(A_1 \cup A_2)$ , so gilt einerseits  $B_\varepsilon(\underline{x}) \cap (A_1 \cup A_2) = (B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A_1) \cup (B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A_2) \neq \emptyset$  für alle  $\varepsilon > 0$ , d.h.  $B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A_1 \neq \emptyset$  oder  $B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A_2 \neq \emptyset$ , und andererseits  $\emptyset \neq B_\varepsilon(\underline{x}) \cap ((A_1 \cup A_2)^c) = (B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A_1^c) \cap (B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A_2^c)$ , also  $B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A_1^c \neq \emptyset$  und  $B_\varepsilon(\underline{x}) \cap A_2^c \neq \emptyset$ . Zusammen folgt  $\underline{x} \in \partial A_1$  oder  $\underline{x} \in \partial A_2$  und damit  $\partial(A_1 \cup A_2) \subseteq \partial A_1 \cup \partial A_2$ .  $\partial(A_1 \cap A_2) \subseteq \partial A_1 \cup \partial A_2$  zeigt man ganz analog. Da aus Symmetriegründen offensichtlich  $\partial A = \partial A^c$ , folgt ebenso  $\partial(A_1 \setminus A_2) = \partial(A_1 \cap A_2^c) \subseteq \partial A_1 \cup \partial A_2^c = \partial A_1 \cup \partial A_2$ .  $\square$

Während sich Lemma 1.27 mit nicht notwendigerweise messbaren Mengen beschäftigt hat, kommen wir nun zu den relevanteren Eigenschaften des Jordan-Inhaltes für messbare Mengen.

**Proposition 1.30 (Eigenschaften des Jordan-Inhaltes).** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  beschränkt und Jordan-messbar.

1. Ist  $A \subseteq B$ , so gilt  $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ . Genauer ist  $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A)$ . (Monotonie)
2. Es gilt  $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$ . (Sub-Additivität)
3. Gilt  $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ , so ist  $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ . (Additivität)
4. Für  $\underline{c} \in \mathbb{R}^d$  ist  $\lambda(A + \underline{c}) = \lambda(A)$ . (Translationsinvarianz)

*Beweis.* Zunächst ist nach Korollar 1.29 klar, dass alle auftretenden Mengen messbar sind.  
 1.: Es gilt  $\lambda(A) = \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) = \lambda(B)$  nach Lemma 1.27 2. Die zweite Aussage folgt aus 3.  
 2.: Nach Lemma 1.27 5. gilt  $\lambda(A \cup B) = \lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ .  
 3.: Nach Definition des Inneren sind  $A^\circ, B^\circ$  offene Teilmengen von  $A \cup B$  und somit  $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ . Ferner sind mit  $A, B$  und  $A \cup B$  auch  $A^\circ, B^\circ$  und  $(A \cup B)^\circ$  Jordan-messbar nach Lemma 1.27 4. Wegen  $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$  folgt aus den Eigenschaften in Lemma 1.27

$$\begin{aligned} \lambda(A \cup B) &\stackrel{1.27\ 4.}{=} \lambda((A \cup B)^\circ) = \lambda_*((A \cup B)^\circ) \stackrel{1.27\ 2.}{\geq} \lambda_*(A^\circ \cup B^\circ) \stackrel{1.27\ 6.}{=} \lambda_*(A^\circ) + \lambda_*(B^\circ) \\ &\stackrel{1.27\ 4.}{=} \lambda(A) + \lambda(B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) \stackrel{1.27\ 5.}{\geq} \lambda^*(A \cup B) = \lambda(A \cup B), \end{aligned}$$

also gilt überall Gleichheit, und die Aussage folgt.

4.: Nach Definition 1.2 ist der Inhalt von Quadern translationsinvariant und damit wegen Proposition 1.18 2. auch der jeder Quadersumme. Durch Grenzwertbildung gemäß Definition 1.22 überträgt sich diese Eigenschaft dann auch auf jede Jordan-messbare Menge.  $\square$

### 1.3 Integration über Jordan-messbare Mengen

Nachdem wir bisher nur Funktionen über Quader integriert haben, wollen wir dieses Konzept erweitern und über Jordan-messbare Mengen integrieren.

**Definition 1.31 (Integral über Jordan-messbare Mengen).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Jordan-messbare (und damit beschränkte) Menge mit  $A \subseteq Q$  für einen Quader  $Q$ , sowie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definieren wir

$$f_A : \begin{cases} Q & \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} & \mapsto \begin{cases} f(\underline{x}), & \underline{x} \in A, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$$

sowie die Unter- und Oberintegrale

$$\int_A^* f(\underline{x}) \, d\underline{x} := \int_Q^* f_A(\underline{x}) \, d\underline{x}, \quad \int_A f(\underline{x}) \, d\underline{x} := \int_Q f_A(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

Die Funktion  $f$  heißt über  $A$  integrierbar, falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen und endlich sind. Der gemeinsame Wert heißt dann das (Riemann-)Integral von  $f$  über  $A$ , und wir schreiben dafür

$$\int_A f(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

Da nun das Riemann-Integral über messbare Mengen nichts anderes ist als das Riemann-Integral über einen Quader, kann man einige Eigenschaften recht schnell übertragen.

**Satz 1.32 (Eigenschaften des Riemann-Integrals).** Die Aussagen der Sätze 1.12 und 1.10 gelten auch dann, wenn man den Quader  $Q$  durch eine Jordan-messbare Menge  $A$  ersetzt. Letztere lässt sich noch wie folgt erweitern:

Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Jordan-messbare Menge,  $N \subseteq A$  eine Jordan-Nullmenge sowie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig auf  $A \setminus N$ , dann ist  $f$  über  $A$  integrierbar.

*Beweis.* Die Aussagen von Satz 1.12 übertragen sich trivialerweise, zu zeigen ist somit nur noch, dass auch Satz 1.10 und dessen Erweiterung gelten. Man beachte dazu, dass trotz der Stetigkeit von  $f$  auf  $A$  die Funktion  $f_A$  aus Definition 1.31 i.A. unstetig auf dem Rand  $\partial A$  ist und sich damit die Aussage von Satz 1.10 nicht direkt übertragen lässt.

Da  $A$  messbar ist, ist  $\partial A$  nach Proposition 1.28 eine Nullmenge. Ist  $f$  auf  $A \setminus N$  stetig, so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f_A$  aus Definition 1.31 in  $N \cup \partial A$  enthalten und damit ebenfalls eine Nullmenge, denn nach Lemma 1.27 5. gilt  $\lambda^*(N \cup \partial A) \leq \lambda^*(N) + \lambda^*(\partial A) = 0$ . Daher genügt es, die folgende Aussage zu zeigen: Ist  $Q$  ein kompakter Quader,  $N \subseteq Q$  eine Nullmenge und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig auf  $Q \setminus N$ , dann ist  $f$  über  $Q$  integrierbar.

Da  $N$  eine Jordan-Nullmenge ist, existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Quadersumme  $S$  aus disjunkten Quadern  $Q_1, \dots, Q_{n(\varepsilon)}$ , so dass  $N \subseteq S^\circ$  und  $\lambda(S^\circ) = \lambda(S) < \varepsilon$ . Wir können annehmen, dass die Quader eine beliebig vorgegebene Feinheit  $\delta$  haben (falls nicht, kann man jeden Quader in entsprechend kleinere Teilquader zerlegen). Die dadurch gegebene Zerlegung von  $Q \cap S^\circ$  lässt sich zu einer Zerlegung  $\mathcal{P}(Q) = \{Q_1, \dots, Q_{n(\varepsilon)}, Q_{n(\varepsilon)+1}, \dots, Q_{n(\varepsilon)+m}\}$  von  $Q$  mit vorgegebener Feinheit  $\delta$  ergänzen.

Da  $N \subseteq S^\circ$ , ist  $f$  auf der abgeschlossenen Menge  $Q \setminus S^\circ$  gleichmäßig stetig. Wie im Beweis von Satz 1.10 folgt, dass für eine hinreichend kleine Feinheit  $\delta(\mathcal{P}(Q)) < \delta'$  für die Differenz zwischen Ober- und Untersumme von  $f$  auf  $Q \setminus S^\circ$  gilt  $\sum_{k=n(\varepsilon)+1}^m (M_{Q_k}(f) - m_{Q_k}(f)) \lambda(Q_k) \leq \varepsilon$ . Ferner ist  $f$  nach Voraussetzung beschränkt, d.h. es existiert ein  $0 < C < \infty$  mit  $|f(\underline{x})| \leq C$  für alle  $\underline{x} \in Q$ . Daher lässt sich die Differenz der Ober- und Untersumme von  $f$  auf  $S^\circ$  abschätzen durch  $\sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} (M_{Q_k}(f) - m_{Q_k}(f)) \lambda(Q_k) \leq 2C \lambda(S) < 2C\varepsilon$ . Zusammen erhält man, dass für eine hinreichend feine Zerlegung gilt  $O_{\mathcal{P}(Q)} - U_{\mathcal{P}(Q)} < (2C + 1)\varepsilon$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Integrierbarkeit von  $f$  über  $Q$ .  $\square$

**Bemerkung 1.33 (Integrale über Jordan-Nullmengen).** Der Beweis von Satz 1.32 zeigt auch, dass der Wert des Integrals einer beschränkten Funktion über eine Nullmenge gleich 0 sein muss, d.h. ist  $N \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Jordan-Nullmenge und  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, so gilt  $\int_N f(\underline{x}) d\underline{x} = 0$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 1.32 gilt also  $\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{A \setminus N} f(\underline{x}) d\underline{x}$ .

**Bemerkung 1.34 (Stückweise Stetigkeit revisited).** In Bemerkung 1.11 wurde die Frage aufgeworfen, was man in höheren Dimensionen  $d > 1$  unter stückweiser Stetigkeit einer Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  verstehen kann, insbesondere im Hinblick auf Integrierbarkeit. Der vorhergehende Satz erlaubt nun die folgende Antwort bzw. Interpretation: Stückweise Stetigkeit entspricht Stetigkeit außerhalb einer Jordan-Nullmenge, oder mit anderen Worten, die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  ist eine Jordan-Nullmenge.

Da endlich viele isolierte Punkte stets eine Jordan-Nullmenge bilden, stimmt diese Interpretation für  $d = 1$  mit der üblichen Definition stückweiser Stetigkeit überein.

**Proposition 1.35 (Prinzip von Cavalieri).** Seien  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Jordan-messbare Menge und  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \supseteq A$  ein Quader. Gilt für ein  $i$ , dass für alle  $\xi \in [a_i, b_i]$

$$A_i(\xi) := \{\underline{x}_{-i} \in Q_{-i} \mid (\underline{x}_{-i}, \xi) \in A\}$$

ein  $d - 1$ -dimensionales Volumen  $\lambda_{d-1}(A(\xi))$  hat, dann gilt

$$\lambda(A) = \int_{a_i}^{b_i} \lambda_{d-1}(A(\xi)) d\xi.$$

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $i = d$ . Wir verwenden den Satz von Fubini (Satz 1.14) und setzen  $A := \{(\underline{x}_{-d}, \xi) \mid \underline{x}_{-d} \in A_d(\xi), a_d \leq \xi \leq b_d\}$ , dann gilt

$$\lambda(A) = \int_Q 1_A(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{a_d}^{b_d} \int_{Q_{-d}} 1_{A_d(\xi)}(\underline{x}_{-d}) d\underline{x}_{-d} d\xi = \int_{a_d}^{b_d} \lambda_{d-1}(A(\xi)) d\xi.$$

□

**Beispiel 1.36 (Fläche eines Kreises).** Wir wollen die Fläche des Kreises mit Radius  $r$  um den Ursprung,  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ , berechnen. Offensichtlich lässt sich  $A$  alternativ beschreiben durch  $A = \{(x, y) \mid y \in [-r, r], -\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2}\}$  und ist in dem Quader  $[-r, r] \times [-r, r]$  enthalten. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \int_{[-r, r]^2} 1_A(x, y) d(x, y) = \int_{-r}^r \int_{-r}^r 1_{\{|x| \leq \sqrt{r^2 - y^2}\}}(x) dx dy = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - y^2} dy \\ &\stackrel{y=r \sin(t)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2 \cos^2(t) dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt = r^2 \pi. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.37 (Volumen eines Kegels).** Nun berechnen wir das Volumen eines Kegels mit einem Kreis mit Radius  $r$  als Grundfläche und Höhe  $h$ . Wir stellen den Kegel dazu auf den Kopf, d.h. mit der Spitze auf den Ursprung des Koordinatensystems, so dass wir ihn durch

$$A = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq \left(\frac{rz}{h}\right)^2, 0 \leq z \leq h \right\}.$$

beschreiben können. Dieser ist im Quader  $[-r, r]^2 \times [0, h]$  enthalten, und es folgt

$$\lambda(A) = \int_0^h \int_{[-\frac{rz}{h}, \frac{rz}{h}]^2} 1_{\{x^2 + y^2 \leq (\frac{rz}{h})^2\}}(x, y) d(x, y) dz = \int_0^h \pi \frac{r^2 z^2}{h^2} dz = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$



**Korollar 1.38 (Normalbereiche).** Für eine Jordan-messbare Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  gebe es eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  und Funktionen  $\varphi, \psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für ein  $1 \leq i \leq d$

$$A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \varphi(\underline{x}_{-i}) \leq x_i \leq \psi(\underline{x}_{-i})\}.$$

Dann heißt  $A$  Normalbereich bezüglich  $x_i$ . Ist  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  über  $A$  integrierbar, so gilt

$$\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_K \int_{\varphi(\underline{x}_{-i})}^{\psi(\underline{x}_{-i})} f(\underline{x}) dx_i d\underline{x}_{-i}.$$

*Beweis.* Zunächst bemerken wir, dass

$$A = \{\underline{x} \mid \underline{x}_{-i} \in K, \varphi(\underline{x}_{-i}) \leq x_i \leq \psi(\underline{x}_{-i})\}.$$

Sei nun  $Q = [\underline{a}, \underline{b}] \supseteq A$  ein Quader. Dann gilt mit dem Satz von Fubini 1.14

$$\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_Q 1_A(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{Q_{-i}} \int_{a_i}^{b_i} 1_A(\underline{x}) f(\underline{x}) dx_i d\underline{x}_{-i} = \int_K \int_{\varphi(\underline{x}_{-i})}^{\psi(\underline{x}_{-i})} f(\underline{x}) dx_i d\underline{x}_{-i}.$$

□

**Beispiel 1.39 (Schwerpunkt (eines Kegels)).** Wir wollen den Schwerpunkt einer Jordan-messbaren Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  berechnen. Unter der Annahme einer konstanten Massendichte  $\rho(\underline{x}) \equiv 1$  muss dann  $x_S$ , die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes, die Gleichung

$$\int_A (x - x_S) d(x, y, z) = 0$$

erfüllen, da sich dann die Drehmomente der Volumenteile links und rechts von  $x_S$  aufheben. Entsprechende Gleichungen gelten auch für die  $y$ - und  $z$ -Koordinaten des Schwerpunktes. Damit ist dieser gegeben durch

$$(x_S, y_S, z_S) = \left( \int_A 1 d(x, y, z) \right)^{-1} \left( \int_A x d(x, y, z), \int_A y d(x, y, z), \int_A z d(x, y, z) \right).$$

Dies wenden wir nun an, um den Schwerpunkt des Kegels  $A$  aus Beispiel 1.37 zu berechnen. Aus Symmetriegründen ist klar, dass  $x_S = 0$  und  $y_S = 0$ . Außerdem ist nach der letzten Formel

$$z_S = \frac{3}{\pi r^2 h} \int_A z d(x, y, z) = \frac{3}{\pi r^2 h} \int_0^h \int_{[-\frac{rz}{h}, \frac{rz}{h}]^2} z \cdot 1_{\{x^2 + y^2 \leq (\frac{rz}{h})^2\}} d(x, y) dz = \frac{3}{h^3} \int_0^h z^3 dz = \frac{3}{4} h,$$

was interessanterweise unabhängig von  $r$  ist. Der Schwerpunkt des Kegels liegt also stets  $\frac{h}{4}$  von der Grundfläche entfernt.

## 2 Integralsätze

Bislang sind der Satz von Fubini und das Cavalierische Prinzip die einzigen Hilfsmittel, um Integrale konkret ausrechnen zu können. Wir kommen nun zu einigen Integralsätzen für mehrdimensionale Integrale. Als erstes werden wir in Abschnitt 2.1 mit dem Transformationssatz ein Resultat kennenlernen, mit dem wir Integrale durch Koordinatentransformationen berechnen können.

Bislang haben wir nur Volumina von Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  berechnet. Ebenso kann man aber auch über Kurven (d.h. eindimensionale Objekte) als Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  oder über Flächen als Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  integrieren. Diese Integrale werden wir in den Abschnitten 2.2 und 2.3 einführen. Anschließend betrachten wir Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Integralarten. Der Satz von Gauß oder Divergenzsatz (Abschnitt 2.4) stellt einen Zusammenhang zwischen Volumen- und Flächenintegralen her, der Satz von Stokes (Abschnitt 2.5) anschließend eine Verbindung zwischen Oberflächenintegralen und Kurvenintegralen.

### 2.1 Der Transformationssatz

Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erinnern wir an die Integration durch Substitution:

**Satz 2.1 (Substitutionsregel).** *Seien  $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  bijektiv und stetig differenzierbar sowie  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy.$$

(Der Beweis hierfür ist übrigens einfach, wenn man beachtet, dass die Ableitung nach  $b$  auf beiden Seiten identisch ist.) In der Praxis kann die Berechnung wegen  $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$  auch umgekehrt durch Einsetzung von  $dy = \varphi'(x) dx$  erfolgen:

$$\int_a^b f(y) dy \stackrel{y=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, diese Regel ins Mehrdimensionale zu übertragen. Hierzu müssen wir zunächst berechnen, wie ein Volumenelement, etwa  $Q = [0, 1]^d$ , unter einer linearen Transformation vergrößert oder verkleinert wird.

**Proposition 2.2 (Volumen eines Parallelotops).** *Sei  $Q = [0, 1]^d$  und  $\underline{A}$  eine reellwertige  $d \times d$ -Matrix. Dann ist*

$$\lambda(\underline{A}Q) = |\det(\underline{A})|$$

**Bemerkung 2.3 (Der Fall  $d = 2$ ).** Im Fall  $d = 2$  lässt sich die Aussage der Proposition recht elementar nachrechnen. Sei  $\underline{A}$  eine reellwertige  $2 \times 2$  Matrix. Ziel ist es, die Fläche von

$$S := \underline{A}Q = \left\{ \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in [0, 1] \right\} = \{s\underline{x} + t\underline{y} \mid s, t \in [0, 1]\}$$

zu berechnen, wobei wir die Spaltenvektoren von  $\underline{A}$  mit  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  bezeichnet haben. Mit anderen Worten ist  $\underline{A}Q$  das von  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  aufgespannte Parallelogramm.

Aus geometrischen Überlegungen ist klar, dass die Fläche identisch bleiben muss, wenn man  $\underline{y}$  um ein Vielfaches von  $\underline{x}$  verschiebt (denn das entspricht einer Scherung, bei der Grundseite

und Höhe des Parallelogramms erhalten bleiben). Dies ist etwa dann der Fall, wenn wir das von  $\underline{x}$  und  $\underline{z} := \underline{y} - \frac{1}{\|\underline{x}\|^2} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \underline{x}$  aufgespannte Rechteck betrachten ( $\|\underline{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$  bezeichne dabei die euklidische Norm von  $\underline{x}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standard-Skalarprodukt). Da  $\underline{x} \perp \underline{z}$ , gilt für die Fläche  $\lambda(S)$ , dass

$$\begin{aligned} \lambda(S)^2 &= \|\underline{x}\|^2 \cdot \left\| \underline{y} - \frac{1}{\|\underline{x}\|^2} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \underline{x} \right\|^2 = \|\underline{x}\|^2 \cdot \left( \|\underline{y}\|^2 - \frac{2}{\|\underline{x}\|^2} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 + \frac{1}{\|\underline{x}\|^4} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 \|\underline{x}\|^2 \right) \\ &= \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2 - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 = x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 - x_1^2 y_1^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 - x_2^2 y_2^2 \\ &= x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2, \end{aligned}$$

also

$$\lambda(S) = |x_1 y_2 - x_2 y_1| = |\det(\underline{x}, \underline{y})| = |\det(\underline{A})|.$$

*Beweis von Proposition 2.2.* Seien  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d \in \mathbb{R}^d$  die Spaltenvektoren von  $\underline{A}$ . Wir definieren  $\sigma := \text{sgn}(\det(\underline{A}))$ . Wir werden zeigen, dass  $\rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) := \sigma \cdot \lambda(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) = \sigma \cdot \lambda(\underline{A}Q)$  eine alternierende (d.h.  $\rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) = 0$ , falls  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d$  linear abhängig sind), normierte (d.h.  $\rho(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d) = 1$ ) Multilinearform ist.

Die Normiertheit ist klar, denn falls  $A$  die  $d \times d$ -Einheitsmatrix ist, gilt  $\rho(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d) = \lambda(Q) = \lambda([0, 1]^d) = 1$  nach Definition 1.2. Sind nun die Vektoren  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d$  linear abhängig, so ist bekanntermaßen die Determinante der aus ihnen gebildeten Matrix  $\underline{A}$  gleich 0 und damit wegen  $\sigma = \text{sgn}(\det(\underline{A})) = 0$  auch  $\rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) = 0$ , also ist  $\rho$  alternierend.

Aus geometrischen Überlegungen ist klar, dass  $\lambda(\underline{x}_1, \dots, \alpha \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_d) = |\alpha| \lambda(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_d)$  für alle  $1 \leq i \leq d$  (wenn man genau eine Kante des Parallelotops um  $\alpha$  streckt, ändert sich das Volumen um den Faktor  $|\alpha|$ ) und somit  $\rho(\underline{x}_1, \dots, \alpha \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_d) = \alpha \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_d)$  (man beachte, dass sich für  $\alpha < 0$  das Vorzeichen von  $\det(\underline{A})$  ändert). Sei nun  $\underline{x} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \dots + \alpha_d \underline{x}_d$ . Da sich wie in Bemerkung 2.3 das Volumen nicht ändert, wenn man einen Vektor um ein Vielfaches eines anderen Vektors verschiebt (Scherung in der betreffenden Ebene), ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d + \underline{x}) &= \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d + \alpha_1 \underline{x}_1 + \dots + \alpha_d \underline{x}_d) = \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d + \alpha_2 \underline{x}_2 + \dots + \alpha_d \underline{x}_d) \\ &= \dots = \rho(\underline{x}_1, \dots, (1 + \alpha_d) \underline{x}_d) = (1 + \alpha_d) \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) \\ &= \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) + \alpha_d \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) = \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) + \rho(\underline{x}_1, \dots, \alpha_d \underline{x}_d) \\ &= \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) + \rho(\underline{x}_1, \dots, \alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_d \underline{x}_d) = \dots = \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) + \rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}), \end{aligned}$$

was die Multilinearität zeigt.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass  $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) \mapsto \det(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d)$  die einzige alternierende, normierte Multilinearform ist. Daher muss  $\rho = \det$  gelten und somit

$$\lambda(\underline{A}Q) = \lambda(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d) = |\rho(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d)| = |\det(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_d)| = |\det(\underline{A})|. \quad \square$$

**Bemerkung 2.4.** Betrachtet man statt  $[0, 1]^d$  beliebige Quader  $Q = [\underline{a}, \underline{b}]$ , so lässt sich die Aussage von Proposition 2.2 leicht verallgemeinern zu  $\lambda(\underline{A}Q) = |\det(\underline{A})| \lambda(Q)$  (beachte dazu  $\lambda([\underline{a}, \underline{b}]) = \lambda([\underline{0}, \underline{b} - \underline{a}]) = \lambda(\underline{D}[\underline{0}, 1]^d) = \det(\underline{D})$ , wobei  $\underline{D}$  eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen  $b_1 - a_1, \dots, b_d - a_d$  ist). Diese überträgt sich nach Definition 1.19 dann unmittelbar auf Quadersummen und damit nach Definition 1.22 auch auf jede Jordan-messbare Menge  $B$ .

Wendet man dieses Resultat auf infinitesimale Flächenelemente an, so erhält man den Transformationssatz. Um ihn formulieren zu können, benötigen wir noch einen Begriff, der schon im Satz über implizite Funktionen in der Analysis II aufgetaucht ist.

**Definition 2.5 (Diffeomorphismus).** Seien  $A, A' \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Dann heißt<sup>3</sup>  $\varphi \in \mathcal{C}^1(A, A')$  ein ( $\mathcal{C}^1$ -)Diffeomorphismus, falls  $\varphi$  stetig differenzierbar und bijektiv ist, und  $\varphi^{-1}$  ebenfalls stetig differenzierbar ist.

**Bemerkung 2.6 (Charakterisierung von  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismen).** Aus der Analysis II ist bekannt, dass eine stetig differenzierbare, bijektive Funktion  $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow A' \subseteq \mathbb{R}^d$  genau dann ein Diffeomorphismus ist, wenn die Jacobi-Matrizen  $\underline{D}\varphi(\underline{x}) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\underline{x})\right)_{1 \leq i, j \leq d}$  für alle  $\underline{x} \in A$  invertierbar sind.

**Satz 2.7 (Transformationsatz).** Seien  $A, A' \subseteq \mathbb{R}^d$  Jordan-messbar und offen sowie  $\varphi \in \mathcal{C}^1(A, A')$  ein Diffeomorphismus. Ist  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gilt

$$\int_{A'} f(\underline{y}) d\underline{y} = \int_A f(\varphi(\underline{x})) |\det(\underline{D}\varphi(\underline{x}))| d\underline{x},$$

falls eine der beiden Seiten existiert.

*Beweisskizze.* Da der exakte Beweis recht technisch ist, geben wir hier nur eine Skizze an und zeigen lediglich, dass für Würfel  $W_r = [a, b]^d$  mit Kantenlänge  $b - a =: r > 0$  und  $\underline{x} \in W_r$  gilt

$$\frac{\lambda(\varphi(W_r))}{\lambda(W_r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} |\det(\underline{D}\varphi(\underline{x}))|. \quad (*)$$

Schöpft man nun  $A$  mit kleinen Würfeln  $W_{r_1}, \dots, W_{r_n}$  aus (d.h. approximiert  $A$  wie bei der Definition des (inneren) Jordan-Inhalts durch eine disjunkte Quader- bzw. hier Würfelsumme), so wird  $A'$  wegen der Bijektivität von  $\varphi$  durch die Mengen  $\varphi(W_{r_1}), \dots, \varphi(W_{r_n})$  ausgeschöpft, so dass für  $\underline{x}_i \in W_{r_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , gilt

$$\begin{aligned} \int_{A'} f(\underline{y}) d\underline{y} &\approx \sum_{i=1}^n f(\varphi(\underline{x}_i)) \lambda(\varphi(W_{r_i})) && \text{wegen Konvergenz der Riemann-Summen} \\ &\approx \sum_{i=1}^n f(\varphi(\underline{x}_i)) |\det(\underline{D}\varphi(\underline{x}_i))| \lambda(W_{r_i}) && \text{wegen } (*) \\ &\approx \int_A f(\varphi(\underline{x})) |\det(\underline{D}\varphi(\underline{x}))| d\underline{x}. && \text{wegen Konvergenz der Riemann-Summen} \end{aligned}$$

Nun zum Beweis von (\*). O.B.d.A. sei  $\underline{0} \in W_r$  sowie  $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$  (das lässt sich durch eine Translation sowie Addition einer Konstanten zu  $\varphi$  stets erreichen). Wir betrachten zunächst den Spezialfall  $\underline{D}\varphi(\underline{0}) = \underline{E}_d$  ( $d \times d$ -Einheitsmatrix). Nach Definition der Differenzierbarkeit in  $\mathbb{R}^d$  gilt dann

$$\frac{\|\varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{0}) - \underline{E}_d \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \frac{\|\varphi(\underline{x}) - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} 0.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Da  $r \downarrow 0$ , gilt dann

$$\|\varphi(\underline{x}) - \underline{x}\| \leq \varepsilon \|\underline{x}\| \leq \varepsilon r \sqrt{d}$$

für  $\underline{x} \in W_r$  mit  $r$  klein genug und damit

$$\lambda(W_{r(1-\varepsilon\sqrt{d})}) \leq \lambda(\varphi(W_r)) \leq \lambda(W_{r(1+\varepsilon\sqrt{d})}),$$

<sup>3</sup>Für offene Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $B \in \mathbb{R}^c$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}^k(A, B)$  die Menge der  $k$  mal stetig differenzierbaren Abbildungen  $f : A \rightarrow B$ .  $\mathcal{C}^0(A, B)$  ist die Menge der stetigen Abbildungen  $f : A \rightarrow B$ .

also

$$(1 - \varepsilon\sqrt{d})^d \leq \frac{\lambda(\underline{\varphi}(W_r))}{\lambda(W_r)} \leq (1 + \varepsilon\sqrt{d})^d.$$

Lassen wir nun  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $r \downarrow 0$ , folgt wegen  $\det(\underline{E}_d) = 1$  die Behauptung. Im allgemeinen Fall betrachten wir  $\underline{\psi} = \underline{D}\underline{\varphi}(\underline{0})^{-1} \cdot \underline{\varphi}$ , so dass  $\underline{D}\underline{\psi}(\underline{0}) = \underline{E}_d$ . Mit Bemerkung 2.4 folgt dann aus dem schon bewiesenen Spezialfall

$$\frac{\lambda(\underline{\varphi}(W_r))}{\lambda(W_r)} = \frac{\lambda(\underline{D}\underline{\varphi}(\underline{0}) \cdot \underline{\psi}(W_r))}{\lambda(W_r)} = |\det(\underline{D}\underline{\varphi}(\underline{0}))| \frac{\lambda(\underline{\psi}(W_r))}{\lambda(W_r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} |\det(\underline{D}\underline{\varphi}(\underline{0}))|.$$

□

**Beispiel 2.8 (Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^2$ ).** Wir betrachten die Abbildung

$$\underline{\varphi} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) & \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \\ (r, \alpha) & \mapsto (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)). \end{cases}$$

Hier wird also  $(r, \alpha)$  ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$  zugeordnet, der den Abstand  $r$  vom Ursprung hat, und dessen Verbindung zum Ursprung mit der  $x$ -Achse einen Winkel von  $\alpha$  einschließt. Die Determinante der Jacobi-Matrix von  $\underline{\varphi}$  ist

$$\det(\underline{D}\underline{\varphi}(r, \alpha)) = \det \left( \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -r \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & r \cos(\alpha) \end{pmatrix} \right) = r.$$

Damit ist  $\underline{D}\underline{\varphi}(r, \alpha)$  für alle  $(r, \alpha) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  invertierbar, und mit Bemerkung 2.6 folgt, dass  $\underline{\varphi}$  ein Diffeomorphismus ist. Man beachte, dass Punkte auf der positiven  $x$ -Achse von  $\underline{\varphi}$  nicht getroffen werden, da  $\alpha \neq 0$  gefordert ist (sonst wäre  $\underline{\varphi}$  nicht auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar). Dies ist jedoch nach Satz 1.32 und Bemerkung 1.33 für die Anwendung des Transformationssatzes ohne Bedeutung, da beliebig große Abschnitte der positiven  $x$ -Achse Nullmengen bezüglich des 2-dimensionalen Jordan-Inhalts sind.

Es folgen nun ein paar Beispiele, wie man mit Hilfe von Polarkoordinaten konkrete Integrale berechnen kann.

1. Sei  $I$  ein Intervall und

$$K_I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \in I\}$$

eine Kreissegment (für  $I = [0, 1]$  z.B. ist  $K_I = B_1(\underline{0})$ ) sowie  $g \in C^0(K_I, \mathbb{R})$ , dann ist nach dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini (Satz 1.14)

$$\int_{K_I} g(\underline{x}) d\underline{x} = \int_I \int_0^{2\pi} r \cdot g(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) d\alpha dr.$$

Ist insbesondere  $g(\underline{x}) = h(\|\underline{x}\|)$  rotationssymmetrisch, so gilt

$$\int_{K_I} g(\underline{x}) d\underline{x} = 2\pi \int_I r \cdot h(r) dr.$$

2. Als Beispiel berechnen wir wie in Beispiel 1.36 erneut den Inhalt des Kreises  $\overline{B}_z(\underline{0})$  mit Radius  $z$  um den Ursprung. Aus 1. lesen wir ab

$$\int_{\overline{B}_z(\underline{0})} 1 d\underline{x} = 2\pi \int_0^z r dr = z^2\pi.$$

3. Zum Schluss zeigen wir, dass der Wert des Gauß'schen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx := \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ist. Diese Gleichheit folgt aus

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 2\pi \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \pi,$$

wobei wir verwendet haben, dass das uneigentliche Integral rechts existiert (denn für hinreichend große  $r$  ist wegen  $re^{-r^2} \leq r^{-2}$  letzteres eine integrierbare Majorante).

**Beispiel 2.9 (Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ ).** Wir betrachten die Abbildung

$$\underline{\varphi} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) & \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\} \\ (r, \alpha, \beta) & \mapsto (r \sin(\alpha) \cos(\beta), r \sin(\alpha) \sin(\beta), r \cos(\alpha)). \end{cases}$$

Hier wird  $(r, \alpha, \beta)$  auf einen Punkt  $\underline{x}$  abgebildet, der den Abstand  $r$  vom Ursprung hat, dessen Verbindung zum Ursprung mit der  $z$ -Achse einen Winkel  $\alpha$  bildet und die Verbindung des Ursprungs mit der Projektion von  $\underline{x}$  auf die  $xy$ -Ebene einen Winkel  $\beta$  mit der  $x$ -Achse. ( $\underline{\varphi}$  trifft alle Punkte des  $\mathbb{R}^3$  außerhalb der positiven  $xz$ -Ebene, deren Abschnitte Nullmengen bezüglich des 3-dimensionalen Jordan-Inhaltes sind.) Die Jacobi-Matrix ist hier gegeben durch

$$\underline{\underline{D}}\underline{\varphi}(r, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \cos(\beta) & r \cos(\alpha) \cos(\beta) & -r \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) & r \cos(\alpha) \sin(\beta) & r \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) & -r \sin(\alpha) & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\det(\underline{\underline{D}}\underline{\varphi}(r, \alpha, \beta)) = r^2 \cos^2(\alpha) \sin(\alpha) + r^2 \sin^3(\alpha) = r^2 \sin(\alpha) > 0,$$

(da  $\alpha \in (0, \pi)$  und  $r > 0$ ), also ist  $\underline{\varphi}$  ein Diffeomorphismus.

Wir berechnen das Volumen der Kugel  $\overline{B}_z(\underline{0}) \subseteq \mathbb{R}^3$  mit Radius  $z$  um den Ursprung. Es gilt

$$\lambda(\overline{B}_z(\underline{0})) = \int_{\overline{B}_z(\underline{0})} 1 d(x, y, z) = \int_0^z \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\alpha) d\beta d\alpha dr = 4\pi \int_0^z r^2 dr = \frac{4}{3}\pi z^3.$$

## 2.2 Weg- oder Kurvenintegrale

Wegintegrale (oft auch Kurvenintegrale genannt) sind bereits aus der Analysis II bekannt. Da wir diese im Folgenden häufig benötigen werden, wiederholen wir ein paar wichtige Fakten.

**Definition 2.10 ( $\mathcal{C}^k$ -Kurve, wegweise zusammenhängend).** Sei  $I = [a, b]$  ein Intervall.

1.  $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^d)$  bezeichne die Menge aller  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^k((a, b), \mathbb{R}^d)$  mit stetigen Fortsetzungen auf den Randpunkten von  $I$ , d.h.  $\underline{\gamma}^{(i)}(a) := \lim_{t \downarrow a} \underline{\gamma}^{(i)}(t)$  und  $\underline{\gamma}^{(i)}(b) := \lim_{t \uparrow b} \underline{\gamma}^{(i)}(t)$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Elemente  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^d)$  nennt man  $\mathcal{C}^k$ -Kurven.
2. Eine stetige Kurve  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$  heißt stückweise  $\mathcal{C}^k$ -Kurve, falls es endlich viele Punkte  $(\tau_i)_{0 \leq i \leq n}$  gibt mit  $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$ , so dass die Abschnitte  $\underline{\gamma}_i := \underline{\gamma}|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$   $\mathcal{C}^k$ -Kurven sind, d.h.  $\underline{\gamma}_i \in \mathcal{C}^k([\tau_{i-1}, \tau_i], \mathbb{R}^d)$  für  $1 \leq i \leq n$ . Eine stückweise  $\mathcal{C}^k$ -Kurve  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$  heißt geschlossen, wenn  $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$ .

3. Sind  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$  und  $\underline{\beta} \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^d)$  für ein weiteres Intervall  $J = [c, d]$ , so heißt  $\underline{\beta}$  eine Umparametrisierung von  $\underline{\gamma}$ , falls es ein bijektives  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$  gibt mit  $\underline{\beta} \circ \varphi = \underline{\gamma}$ . Falls  $\varphi' > 0$ , heißt  $\varphi$  orientierungserhaltend, falls  $\varphi' < 0$ , heißt  $\varphi$  orientierungsumkehrend.
4. Eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\gamma}$  heißt nach Bogenlänge parametrisiert, wenn  $\|\underline{\gamma}'(t)\| = 1$  für alle  $t \in I$ .
5. Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt wegweise zusammenhängend, wenn es zu allen  $\underline{x}, \underline{y} \in A$  eine stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^0([a, b], A)$  gibt mit  $\underline{\gamma}(a) = \underline{x}$ ,  $\underline{\gamma}(b) = \underline{y}$ . Eine offene, wegweise zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Nun wiederholen wir, was wir bereits über Ableitungen von Kurven wissen.

**Bemerkung 2.11 (Ableitungen von Kurven).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $I$  ein Intervall und  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^1(I, A)$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve sowie  $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ , dann gilt<sup>4</sup>

$$(f \circ \underline{\gamma})'(t) := \langle \nabla f(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle.$$

Ist außerdem  $J$  ein Intervall und  $\underline{\beta} \in \mathcal{C}^1(J, A)$  eine Umparametrisierung von  $\underline{\gamma}$  mit  $\underline{\beta} \circ \varphi = \underline{\gamma}$  für ein  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ , so ist

$$\underline{\gamma}'(t) = \underline{\beta}'(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

**Beispiel 2.12 (Kreislinie).** Die  $\mathcal{C}^\infty$ -Kurve  $\underline{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definiert durch

$$\underline{\gamma}(t) := (\cos(t), \sin(t)),$$

stellt einen geschlossenen Kreis dar. Dieser ist nach der Bogenlänge parametrisiert, da

$$\|\underline{\gamma}'(t)\| = \|(-\sin(t), \cos(t))\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1.$$

**Definition 2.13 (Kurvenintegrale).** Seien  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$  und  $I$  ein Intervall sowie  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^1(I, A)$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve. Dann heißt

$$\int_{\underline{\gamma}} f(\underline{x}) d\underline{x} := \int_I f(\underline{\gamma}(t)) \|\underline{\gamma}'(t)\| dt$$

Kurvenintegral erster Art (oder skalares Kurvenintegral). Ist  $\underline{f} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^d)$ , so heißt

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} := \int_I \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle dt$$

Kurvenintegral zweiter Art (oder vektorielles Kurvenintegral).

Für eine stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^0(I, A)$  definiert man analog

$$\int_{\underline{\gamma}} f(\underline{x}) d\underline{x} := \sum_{i=1}^n \int_{\underline{\gamma}_i} f(\underline{x}) d\underline{x} \quad \text{bzw.} \quad \int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} := \sum_{i=1}^n \int_{\underline{\gamma}_i} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$

<sup>4</sup>Wir erinnern an die Definition für die partiellen Ableitungen: Für  $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$  ist

$$D_i f(\underline{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + h \underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h}.$$

Weiter ist

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right) = (D_1 f, \dots, D_d f)$$

der Gradient von  $f$ .

**Bemerkung 2.14 (Integrale über geschlossene Kurven).** Ist  $\underline{\gamma}$  eine geschlossene Kurve, so schreibt man auch

$$\oint_{\underline{\gamma}} f(\underline{x}) d\underline{x} \quad \text{und} \quad \oint_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$

für die Kurvenintegrale erster und zweiter Art. Kurvenintegrale zweiter Art werden auch „Arbeitsintegral“ genannt, da es sich hier um das Skalarprodukt eines Vektorfeldes, also z.B. einer Kraft, und einer Ortsverschiebung, also einem Weg, handelt.

**Lemma 2.15 (Kurvenintegrale sind invariant gegenüber Umparametrisierungen).**

Sind  $I = [a, b]$ ,  $J = [c, d]$  Intervalle und  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^1(I, A)$ ,  $\underline{\beta} \in \mathcal{C}^1(J, A)$   $\mathcal{C}^1$ -Kurven sowie  $\underline{\beta} \circ \varphi = \underline{\gamma}$  für eine orientierungserhaltende Umparametrisierung  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ . Dann gilt für  $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$  bzw.  $\underline{f} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\underline{\beta}} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\underline{\gamma}} f(\underline{x}) d\underline{x}, \quad \int_{\underline{\beta}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}.$$

*Beweis.* Wir verwenden die Substitutionsregel (Satz 2.1) und schreiben

$$\begin{aligned} \int_J f(\underline{\beta}(t)) \|\underline{\beta}'(t)\| dt &\stackrel{t=\varphi(s)}{=} \int_I f(\underline{\beta}(\varphi(s))) \|\underline{\beta}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = \int_I f(\underline{\gamma}(s)) \|\underline{\gamma}'(s)\| ds, \\ \int_J \langle \underline{f}(\underline{\beta}(t)), \underline{\beta}'(t) \rangle dt &\stackrel{t=\varphi(s)}{=} \int_I \langle \underline{f}(\underline{\beta}(\varphi(s))), \underline{\beta}'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds = \int_I \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(s)), \underline{\gamma}'(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

(Wäre  $\varphi$  orientierungsumkehrend, würde sich wegen  $\varphi(a) = d$  und  $\varphi(b) = c$  das Vorzeichen der Integrale auf der linken Seite genau umdrehen.)  $\square$

**Beispiel 2.16 (Bogenlänge).** Das Integral

$$\int_{\underline{\gamma}} 1 d\underline{x}$$

wird als *Bogenlänge der Kurve*  $\underline{\gamma}$  bezeichnet. Diese berechnet man für die Kreislinie aus Beispiel 2.12 als

$$\int_{\underline{\gamma}} 1 d\underline{x} = \int_0^{2\pi} \|(-\sin(t), \cos(t))\| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Von stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist man gewohnt, dass sie eine Stammfunktion besitzen. Im Mehrdimensionalen ist dies nicht mehr unbedingt der Fall. Vektorfelder  $\underline{f}$  (d.h. vektorwertige Funktionen  $\underline{f}$ ), die eine solche Stammfunktion  $F$  besitzen, heißen Gradientenfelder.

**Definition 2.17 (Gradientenfeld).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Dann heißt das Vektorfeld  $\underline{f} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^d)$  Gradientenfeld, wenn es ein  $F \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$  gibt mit  $\underline{\nabla} F = \underline{f}$ . Die Funktion  $F$  heißt dann Stammfunktion (oder auch Potential) von  $\underline{f}$ .

**Beispiel 2.18.**

- Wir betrachten das Vektorfeld  $\underline{f} : \mathbb{R}^d \setminus \{\underline{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{\underline{0}\}$ ,  $\underline{f}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$ . Für  $\underline{x} \neq \underline{0}$  ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|\underline{x}\| = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}} = \frac{x_i}{\|\underline{x}\|}.$$

Also ist  $F : \mathbb{R}^d \setminus \{\underline{0}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $F(\underline{x}) = \|\underline{x}\|$ , eine Stammfunktion von  $\underline{f}$ .



2. Nun schauen wir uns das Vektorfeld  $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{f}(x, y) = (-y, x)$  an. Wäre dieses ein Gradientenfeld, müsste es eine Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  geben mit  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -y$ , also wäre  $F(x, y) = -yx + g(y)$  mit geeignetem  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann wäre aber  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -x + g'(y) \neq x$  für jede Funktion  $g$  (und  $x \neq 0$ ), daher kann  $\underline{f}$  kein Gradientenfeld sein.

Das Integral einer stückweisen  $\mathcal{C}^k$ -Kurve  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^d)$  über ein Gradientenfeld  $\underline{f}$  hat sehr schöne Eigenschaften. Ist  $F$  Stammfunktion von  $\underline{f}$ , so hängt ein solches Kurvenintegral nämlich nur von  $F(\underline{\gamma}(a))$  und  $F(\underline{\gamma}(b))$  ab.

**Satz 2.19 (Wegunabhängigkeit von Wegintegralen entlang Gradientenfeldern).** Seien  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  offen, wegweise zusammenhängend und  $\underline{f} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^d)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\underline{f}$  ist ein Gradientenfeld.
2. Für jede geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\gamma}$  ist

$$\oint_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = 0.$$

3. Für  $I = [a, b]$ ,  $J = [c, d]$  und stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurven  $\underline{\beta} \in \mathcal{C}^0(I, A)$  und  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^0(J, A)$  mit  $\underline{\beta}(a) = \underline{\gamma}(c)$  und  $\underline{\beta}(b) = \underline{\gamma}(d)$  gilt

$$\int_{\underline{\beta}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}.$$

*Beweis.* 1.  $\Rightarrow$  2.: Sei  $F \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$  mit  $\nabla F = \underline{f}$  und  $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^0(I, A)$  stückweise  $\mathcal{C}^1$  mit  $I = [a, b]$ . Dann folgt aus Bemerkung 2.11 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \oint_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \sum_{i=1}^n \int_{\underline{\gamma}_i} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle dt = \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle \nabla F(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (F \circ \underline{\gamma})'(t) dt = \sum_{i=1}^n (F(\underline{\gamma}(\tau_i)) - F(\underline{\gamma}(\tau_{i-1}))) = F(\underline{\gamma}(b)) - F(\underline{\gamma}(a)) = 0. \end{aligned}$$

2.  $\Rightarrow$  3.: Wir definieren die stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\alpha} \in \mathcal{C}^0([a, b+d-c], A)$  durch

$$\underline{\alpha} : \begin{cases} [a, b+d-c] & \rightarrow A \\ t & \mapsto \begin{cases} \underline{\beta}(t), & a \leq t \leq b, \\ \underline{\gamma}(b+d-t), & b \leq t \leq b+d-c. \end{cases} \end{cases}.$$

Das bedeutet, dass  $\underline{\alpha}$  zunächst  $\underline{\beta}$  in üblicher und danach  $\underline{\gamma}$  in umgekehrter Richtung durchläuft. Da  $\underline{\beta}$  und  $\underline{\gamma}$  nach den Voraussetzungen in 3. gleiche Anfangs- und Endpunkte haben, ist  $\underline{\alpha}$  geschlossen, und es folgt aus Definition 2.13 und Lemma 2.15, da  $\underline{\alpha}|_{[b, b+d-c]} = \underline{\gamma} \circ \varphi$  mit  $\varphi(t) = b+d-t$  eine orientierungsumkehrende Umparametrisierung ist,

$$0 \stackrel{?}{=} \oint_{\underline{\alpha}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{\underline{\alpha}|_{[a, b]}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} + \int_{\underline{\alpha}|_{[b, b+d-c]}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{\underline{\beta}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} - \int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}.$$

3.  $\Rightarrow$  1.: Ziel ist es, eine Stammfunktion von  $\underline{f}$  anzugeben. Hierzu sei  $\underline{z} \in A$  beliebig, aber fest, und  $I = [a, b]$ . Für  $\underline{x} \in A$  sei  $\underline{\gamma}_{\underline{x}} \in \mathcal{C}^0(I, A)$  eine stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve mit  $\underline{\gamma}_{\underline{x}}(a) = \underline{z}$ ,  $\underline{\gamma}_{\underline{x}}(b) = \underline{x}$

(diese existiert für alle  $\underline{x} \in A$ , da  $A$  nach Voraussetzung wegweise zusammenhängend ist). Wir definieren

$$F(\underline{x}) := \int_{\underline{\gamma}_{\underline{x}}} \underline{f}(\underline{y}) \cdot d\underline{y}$$

und bemerken, dass  $F$  wohldefiniert ist, da  $F(\underline{x})$  nach der Voraussetzung in 3. von  $\underline{\gamma}_{\underline{x}}$  nur über den Endpunkt  $\underline{x}$  der Kurve abhängt (und nicht von der Wahl des Weges von  $\underline{z}$  nach  $\underline{x}$ ). Es bleibt zu zeigen, dass  $\nabla F = \underline{f}$ , also  $F$  eine Stammfunktion von  $\underline{f}$  ist. Für  $1 \leq j \leq d$  und  $\underline{x} \in A$  betrachten wir  $\underline{\gamma}_{\underline{x}} \in \mathcal{C}^0([a, b], A)$  und  $\underline{\gamma}_{\underline{x}+h\underline{e}_j} \in \mathcal{C}^0([a, b+1], A)$ , so dass  $\underline{\gamma}_{\underline{x}+h\underline{e}_j}(t) = \underline{\gamma}_{\underline{x}}(t)$  für  $a \leq t \leq b$  und  $\underline{\gamma}_{\underline{x}+h\underline{e}_j}(t) = \underline{x} + h(t-b)\underline{e}_j$ ,  $b \leq t \leq b+1$ . Das bedeutet, dass  $\underline{\gamma}_{\underline{x}+h\underline{e}_j}$  zunächst entlang  $\underline{\gamma}_{\underline{x}}$  von  $\underline{z}$  bis  $\underline{x}$  verläuft und von dort dann ein Stück weit parallel zur  $j$ -ten Koordinatenachse. (Da  $A$  offen und  $\underline{x} \in A$ , ist auch  $\underline{x} + h\underline{e}_j \in A$  für genügend kleines  $h \in \mathbb{R}$ .) Insbesondere ist auch  $\underline{\gamma}_{\underline{x}+h\underline{e}_j}$  stückweise  $\mathcal{C}^1$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{F(\underline{x} + h\underline{e}_j) - F(\underline{x})}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_{\underline{\gamma}_{\underline{x}+h\underline{e}_j}} \underline{f}(\underline{y}) \cdot d\underline{y} - \int_{\underline{\gamma}_{\underline{x}}} \underline{f}(\underline{y}) \cdot d\underline{y} \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_b^{b+1} \langle \underline{f}(\underline{x} + h(t-b)\underline{e}_j), h\underline{e}_j \rangle dt = \int_b^{b+1} f_j(\underline{x} + h(t-b)\underline{e}_j) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f_j(\underline{x}), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Um zu prüfen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist, geben wir nun noch ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium an.

**Korollar 2.20 (Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern).** *Seien  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^d)$  ein Gradientenfeld. Dann gilt*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

*Beweis.* Für eine Stammfunktion  $F \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$  von  $\underline{f}$  impliziert der Satz von Schwartz

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\underline{x}) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\underline{x}). \quad \square$$

Da  $\underline{f}$  aus Beispiel 2.18 2. die Bedingung aus Korollar 2.20 nicht erfüllt ( $\frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv -1 \neq \frac{\partial f_2}{\partial x} \equiv 1$ ), haben wir einen alternativen Beweis dafür, dass  $\underline{f}$  kein Gradientenfeld sein kann.

**Proposition 2.21 (Hinreichende Bedingung für Gradientenfelder).** *Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  sternförmig, d.h. es gibt ein  $\underline{z} \in A$  (das Zentrum von  $A$ ), so dass  $\underline{z} + t(\underline{x} - \underline{z}) \in A$  für alle  $\underline{x} \in A$  und  $t \in [0, 1]$ . Sei  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^d)$  ein Vektorfeld mit*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

*Dann ist  $\underline{f}$  ein Gradientenfeld mit Stammfunktion*

$$F(\underline{x}) = \int_0^1 \langle \underline{f}(\underline{z} + t(\underline{x} - \underline{z})), \underline{x} - \underline{z} \rangle dt.$$

*Beweis.* Die Voraussetzungen erlauben, Integration und Ableitung zu vertauschen, daher gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\underline{x})}{\partial x_i} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^d f_j(\underline{z} + t(\underline{x} - \underline{z})) \cdot (x_j - z_j) \right) dt \\ &= \int_0^1 f_i(\underline{z} + t(\underline{x} - \underline{z})) + t \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\underline{z} + t(\underline{x} - \underline{z})) \cdot (x_j - z_j) dt \\ &= \int_0^1 f_i(\underline{z} + t(\underline{x} - \underline{z})) + t \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{z} + t(\underline{x} - \underline{z})) \cdot (x_j - z_j) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t f_i(\underline{z} + t(\underline{x} - \underline{z}))) dt = f_i(\underline{x}) - 0 \cdot f_i(\underline{z}) = f_i(\underline{x}) \end{aligned}$$

für alle  $1 \leq i \leq d$ , und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

### 2.3 Oberflächenintegrale

Bislang können wir – mit Indikatorfunktionen  $f(\underline{x}) = 1_A(\underline{x})$  als Integranden –  $d$ -dimensionale Volumina von Jordan-messbaren Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  berechnen sowie Längen von Kurven. Man kann sich – ähnlich wie im letzten Kapitel – aber auch eine komplizierter geformte Oberfläche eines Objektes im  $\mathbb{R}^3$  vorstellen, für die man ebenfalls einen Flächeninhalt berechnen möchte. In der allgemeinen Theorie behandelt man dazu  $\mathbb{R}^c$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^d$  für  $1 \leq c < d$ . Wir wollen jedoch nur den anschaulichen Fall  $c = 2$  und  $d = 3$ , also eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , behandeln. Um die Notation innerhalb dieses Abschnitts etwas übersichtlicher zu halten, setzen wir für  $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$  bzw.  $g \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^d)$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  offen

$$f_{x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{bzw.} \quad g_{x_i} = \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial g_d}{\partial x_i} \right).$$

**Bemerkung 2.22 (Gramsche Determinante und Kreuzprodukt).** Seien  $Q = [0, 1]^2$ ,  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  eine Matrix mit Spaltenvektoren  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$  und  $S = \underline{A}Q$  das von  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  aufgespannte Parallelogramm im  $\mathbb{R}^3$ .

1. Für den (zweidimensionalen) Flächeninhalt  $\lambda_2(S)$  von  $S$  gilt wie in Bemerkung 2.3

$$\begin{aligned} \lambda_2(S)^2 &= \|\underline{x}\|^2 \cdot \left\| \underline{y} - \frac{1}{\|\underline{x}\|^2} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \underline{x} \right\|^2 = \|\underline{x}\|^2 \cdot \left( \|\underline{y}\|^2 - \frac{2}{\|\underline{x}\|^2} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 + \frac{1}{\|\underline{x}\|^4} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 \|\underline{x}\|^2 \right) \\ &= \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2 - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\det(\underline{A}^\top \underline{A}) = \det \left( \begin{pmatrix} \|\underline{x}\|^2 & \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \\ \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle & \|\underline{y}\|^2 \end{pmatrix} \right) = \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2 - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2,$$

also gilt

$$\lambda_2(S) = \sqrt{\det(\underline{A}^\top \underline{A})}.$$

2. Für  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$  ist bekannterweise

$$\underline{x} \times \underline{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt der beiden Vektoren. Für dieses gilt

$$\begin{aligned}\langle \underline{x}, \underline{x} \times \underline{y} \rangle &= x_1(x_2y_3 - y_2x_3) + x_2(x_3y_1 - y_3x_1) + x_3(x_1y_2 - y_1x_2) = 0, \\ \langle \underline{y}, \underline{x} \times \underline{y} \rangle &= y_1(x_2y_3 - y_2x_3) + y_2(x_3y_1 - y_3x_1) + y_3(x_1y_2 - y_1x_2) = 0,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\|\underline{x} \times \underline{y}\|^2 &= (x_2y_3 - y_2x_3)^2 + (x_3y_1 - y_3x_1)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\quad - (x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2) - 2(x_2y_3y_2x_3 + x_3y_1y_3x_1 + x_1y_2y_1x_2) \\ &= \|\underline{x}\|^2\|\underline{y}\|^2 - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 = \lambda_2(S)^2.\end{aligned}$$

Der Vektor  $\underline{x} \times \underline{y}$  steht also senkrecht auf  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  senkrecht, und seine Länge entspricht der Fläche des von  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  aufgespannten Parallelogramms  $S$ . Weiter ist bekannt, dass  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{x} \times \underline{y}$  ein *Rechtssystem* bilden.

Nach diesen Vorüberlegungen müssen wir zunächst allgemeiner definieren, was genau eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  überhaupt sein soll. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten, von denen wir die wählen, die der bei Kurven am ähnlichsten ist.

**Definition 2.23 (Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$ ).**

1. Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $\underline{\kappa} \in C^1(B, \mathbb{R}^3)$ . Gilt  $\text{rg}(\underline{D}\underline{\kappa}(u, v)) = 2$  für alle  $(u, v) \in B$  (d.h.  $\underline{D}\underline{\kappa}(u, v)$  hat vollen Rang), so heißt  $\underline{\kappa}(B)$  ein Flächenstück mit Parameterdarstellung  $\underline{\kappa}$ . Ist  $\underline{\kappa}$  ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und  $\kappa^{-1} : \underline{\kappa}(B) \rightarrow B$  ist ebenfalls stetig), so heißt die Parameterdarstellung auch Einbettung.
2. Seien  $F_1, \dots, F_n$  Flächenstücke. Dann heißt  $F := F_1 \cup \dots \cup F_n$  eine Fläche.
3. Eine differenzierbare, bijektive Abbildung  $\underline{\varphi} : B \rightarrow C$ , wobei  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  ebenfalls ein Gebiet ist, heißt Parametertransformation. Gilt  $\det(\underline{D}\underline{\varphi}(\underline{x})) > 0$  für alle  $\underline{x} \in B$ , so heißt sie zulässig. Existiert zu Parameterdarstellungen  $\underline{\kappa} \in C^1(B, \mathbb{R}^3)$  und  $\underline{\nu} \in C^1(C, \mathbb{R}^3)$  eines Flächenstückes  $F$  eine zulässige Parametertransformation  $\underline{\varphi} \in C^0(B, C)$  mit  $\underline{\kappa} = \underline{\nu} \circ \underline{\varphi}$ , so heißen  $\underline{\kappa}$  und  $\underline{\nu}$  äquivalent. Insbesondere ist dann  $F = \underline{\kappa}(B) = \underline{\nu}(C)$ .

**Bemerkung 2.24 (Einbettungen derselben Fläche sind äquivalent).** Ohne Beweis bemerken wir: Seien  $B, C \subseteq \mathbb{R}^2$  Gebiete,  $\underline{\kappa} \in C^1(B, \mathbb{R}^3)$  und  $\underline{\nu} \in C^1(C, \mathbb{R}^3)$  zwei Einbettungen eines Flächenstückes  $F = \underline{\kappa}(B) = \underline{\nu}(C)$ . Dann sind  $\underline{\kappa}$  und  $\underline{\nu}$  äquivalent. Es gibt sogar eine stetig differenzierbare zulässige Parametertransformation  $\underline{\varphi} \in C^1(B, C)$  mit  $\underline{\kappa} = \underline{\nu} \circ \underline{\varphi}$ .

**Beispiel 2.25 (Graph einer Funktion, Kugeloberfläche).**

1. Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet. Am einfachsten ist es, sich ein Flächenstück als Graph einer Funktion  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  vorzustellen. Hierzu wählt man  $\underline{\kappa}(u, v) := (u, v, g(u, v))$ , dann ist

$$\text{rg}(\underline{D}\underline{\kappa}(u, v)) = \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_u(u, v) & g_v(u, v) \end{pmatrix} \right) = 2.$$

Außerdem ist  $\underline{\kappa}$  eine Einbettung. Für weitere Beispiele berechnen wir

$$\begin{aligned} \det(\underline{D}\underline{\kappa}(u, v)^\top \underline{D}\underline{\kappa}(u, v)) &= \det \left( \begin{pmatrix} 1 + g_u(u, v)^2 & g_u(u, v)g_v(u, v) \\ g_u(u, v)g_v(u, v) & 1 + g_v(u, v)^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 + g_u(u, v)^2 + g_v(u, v)^2. \end{aligned}$$

2. Wir wollen nun die Oberfläche einer Halbkugel mit Radius  $r$  um den Ursprung parametrisieren. Hierzu wählen wir

$$\underline{\kappa} : \begin{cases} B := (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \beta) & \mapsto (r \sin(\alpha) \cos(\beta), r \sin(\alpha) \sin(\beta), r \cos(\alpha)) \end{cases}.$$

Für  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  gilt

$$\text{rg}(\underline{D}\underline{\kappa}(\alpha, \beta)) = \text{rg} \left( \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \cos(\beta) & -r \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ r \cos(\alpha) \sin(\beta) & r \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -r \sin(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \right) = 2.$$

Eine andere Parametrisierung ist

$$\underline{\nu} : \begin{cases} C := \{(u, v) \mid u^2 + v^2 < r^2\} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}) \end{cases}.$$

Es ist

$$\underline{\varphi} : \begin{cases} B & \rightarrow C \\ (\alpha, \beta) & \mapsto (r \sin(\alpha) \cos(\beta), r \sin(\alpha) \sin(\beta)) \end{cases}$$

eine zulässige Umparametrisierung, da

$$\begin{aligned} \det(\underline{D}\underline{\varphi}(\alpha, \beta)) &= \det \left( \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \cos(\beta) & -r \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ r \cos(\alpha) \sin(\beta) & r \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{pmatrix} \right) \\ &= r^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) (\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)) = r^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) > 0 \end{aligned}$$

(beachte  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ). Weiter gilt

$$\underline{\nu} \circ \underline{\varphi}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ r \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ r \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \underline{\kappa}(\alpha, \beta),$$

d.h.  $\underline{\kappa}$  und  $\underline{\nu}$  sind äquivalent.

**Definition 2.26 (Tangentialebene, Einheits-Normalenfeld).** Sei  $F \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Fläche. Ist  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $\underline{\kappa} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Einbettung eines Flächenstückes  $E = \underline{\kappa}(B) \subseteq F$ , so sind für  $(u, v) \in B$  die Vektoren  $\underline{\kappa}_u(u, v), \underline{\kappa}_v(u, v)$  linear unabhängig. Wir nennen

$$T_{\underline{x}} := \{ \underline{\kappa}(u, v) + s \underline{\kappa}_u(u, v) + t \underline{\kappa}_v(u, v) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$$

Tangentialebene von  $F$  in  $\underline{x} := \kappa(u, v)$ . Weiter bezeichnet  $\underline{n}$ , definiert durch

$$\underline{n} \circ \underline{\kappa} : \begin{cases} B & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto \frac{\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)}{\|\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)\|} \end{cases},$$

das Einheits-Normalenfeld von  $E$ . Ist  $\underline{n}$  stetig auf  $F$ , d.h. lässt sich  $\underline{n}$  stetig auf alle Flächenstücke von  $F$  fortsetzen, so heißt  $(F, \underline{n})$  orientierte Fläche.

**Bemerkung 2.27 (Wohldefiniertheit des Einheits-Normalenfeldes).**

1. Nach Bemerkung 2.22 ist

$$\|\underline{\kappa}_u \times \underline{\kappa}_v\| = \sqrt{\det(\underline{D}\underline{\kappa}^\top \underline{D}\underline{\kappa})}.$$

2. Wir zeigen noch, dass das Einheits-Normalenfeld unabhängig (bis auf das Vorzeichen) von der Einbettung von  $F$  ist. Sei dazu  $\underline{\nu} \in \mathcal{C}^1(C, \mathbb{R}^3)$  eine weitere Einbettung von  $F$ . Nach Bemerkung 2.24 gibt es ein  $\underline{\varphi} \in \mathcal{C}^1(B, C)$  mit  $\underline{\kappa} = \underline{\nu} \circ \underline{\varphi}$ . Dann ist

$$\underline{D}\underline{\kappa}(u, v) = \underline{D}\underline{\nu}(\underline{\varphi}(u, v)) \cdot \underline{D}\underline{\varphi}(u, v),$$

d.h.  $\underline{\kappa}_u(u, v), \underline{\kappa}_v(u, v) \in \text{span}(\underline{\nu}_u(\underline{\varphi}(u, v)), \underline{\nu}_v(\underline{\varphi}(u, v)))$ . Daraus folgt, dass die Tangentialebene von  $F$  in  $\underline{\kappa}(u, v) = \underline{\nu}(\underline{\varphi}(u, v))$  unabhängig von der Einbettung ist. Weiter bemerken wir, dass es zwei Vektoren der Länge 1 gibt, die senkrecht auf der Tangentialebene stehen, und die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Ist  $\underline{\varphi}$  zulässig, so sind die von  $\underline{\kappa}$  und  $\underline{\nu}$  erzeugten Einheits-Normalenvektoren identisch, andernfalls dreht sich das Vorzeichen beim Übergang von  $\underline{\kappa}$  zu  $\underline{\nu}$  um. (Letzteres beweisen wir hier nicht.)

**Beispiel 2.28 (Kugeloberfläche).** Wir berechnen die Tangentialvektoren und das Einheits-Normalenfeld der Kugeloberfläche mit Mittelpunkt  $\underline{0}$  (Ursprung) und Radius  $r$ . Sei also  $\underline{\kappa} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  wie in Beispiel 2.25, dann gilt für  $(\alpha, \beta) \in B$  und  $\underline{\kappa}(\alpha, \beta) = (x, y, z)$ , dass

$$\begin{aligned} \underline{\kappa}_\alpha(\alpha, \beta) \times \underline{\kappa}_\beta(\alpha, \beta) &= \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ r \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ -r \sin(\alpha) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ r \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r^2 \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin^2(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{pmatrix} = r \sin(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also ist  $\|\underline{\kappa}_\alpha(\alpha, \beta) \times \underline{\kappa}_\beta(\alpha, \beta)\| = r^2 \sin(\alpha)$  und somit  $\underline{n}(\underline{x}) = \frac{1}{r} \underline{x}$  das Einheits-Normalenfeld.

Nun können wir Oberflächenintegrale definieren. Dies geschieht analog zu Wegintegralen.

**Definition 2.29 (Oberflächenintegrale).** Seien  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  offen,  $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $\underline{\kappa} \in \mathcal{C}^1(B, A)$  eine Einbettung des Flächenstückes  $F := \underline{\kappa}(B)$ . Dann heißt

$$\int_{\underline{\kappa}} f(\underline{x}) d\underline{x} := \int_B f(\underline{\kappa}(u, v)) \|\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)\| d(u, v)$$

Oberflächenintegral erster Art. Ist  $\underline{f} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^3)$ , so heißt

$$\int_{\underline{\kappa}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} := \int_B \langle \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)), \underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v) \rangle d(u, v)$$

Oberflächenintegral zweiter Art.

**Bemerkung 2.30.**

1. Das Oberflächenintegral erster Art kann aufgefasst werden als das Gewicht der Fläche  $F = \underline{\kappa}(B)$ , die die Dichteverteilung  $f$  hat. Das Oberflächenintegral zweiter Art entspricht dem mittleren Fluss des Vektorfeldes  $\underline{f}$  durch (d.h. in senkrechter Richtung) die Fläche  $F$ . Deshalb heißen Oberflächenintegrale zweiter Art auch *Flussintegrale*.

2. Beim Oberflächenintegral erster Art entspricht die Norm des Kreuzproduktes der Tangentialvektoren  $\|\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)\| = \sqrt{\det(\underline{D}\underline{\kappa}^\top(u, v)\underline{D}\underline{\kappa}(u, v))}$  der Fläche des von  $\underline{\kappa}_u(u, v)$  und  $\underline{\kappa}_v(u, v)$  aufgespannten Parallelogramms. Demnach ist die Definition des Oberflächenintegrals erster Art analog zur rechten Seite im Transformationssatz 2.7.

3. Beim Oberflächenintegral zweiter Art können wir mit dem Einheits-Normalenfeld  $\underline{n}$  aus Definition 2.26 auch schreiben

$$\int_{\underline{\kappa}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_B \langle \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)), \underline{n}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle \|\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)\| d(u, v) = \int_{\underline{\kappa}} \langle \underline{f}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x}) \rangle d\underline{x}$$

4. Manchmal schreibt man für Oberflächenintegrale auch

$$\int_F f(\underline{x}) d\underline{x} := \int_{\underline{\kappa}} f(\underline{x}) d\underline{x}, \quad \int_{F, \underline{n}} \underline{f}(\underline{x}) d\underline{x} := \int_{\underline{\kappa}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$

mit  $\underline{n}$  aus Definition 2.26 ist. Dies ist wegen Lemma 2.31 unten gerechtfertigt.

5. Ist die Fläche  $F$  geschlossen (d.h. sie hat keine Kanten und teilt den umgebenden Raum in einen inneren und einen äußeren Teil), so schreibt man auch

$$\oint_F f(\underline{x}) d\underline{x}, \quad \oint_{F, \underline{n}} \underline{f}(\underline{x}) d\underline{x}$$

für die Oberflächenintegrale erster und zweiter Art.

**Lemma 2.31 (Oberflächenintegrale sind invariant gegenüber Umparametrisierungen).** Seien  $B, C \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $\underline{\kappa} \in \mathcal{C}^1(B, \mathbb{R}^3)$ ,  $\underline{\nu} \in \mathcal{C}^1(C, \mathbb{R}^3)$  Einbettungen eines Flächenstückes  $F := \underline{\kappa}(B) = \underline{\nu}(C)$  und  $\underline{\varphi} \in \mathcal{C}^1(B, C)$  eine zulässige Parametertransformation mit  $\underline{\kappa} = \underline{\nu} \circ \underline{\varphi}$ . Dann gilt für  $F \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$

$$\int_{\underline{\kappa}} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\underline{\nu}} f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Für  $\underline{f} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^3)$  gilt analog

$$\int_{\underline{\kappa}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{\underline{\nu}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}.$$

*Beweis.* Aus Bemerkung 2.22 folgt, zusammen mit  $\underline{D}\underline{\kappa}(u, v) = \underline{D}\underline{\nu}(\underline{\varphi}(u, v))\underline{D}\underline{\varphi}(u, v)$ ,

$$\begin{aligned} \|\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)\| &= \sqrt{\det(\underline{D}\underline{\kappa}(u, v)^\top \underline{D}\underline{\kappa}(u, v))} \\ &= \sqrt{\det(\underline{D}\underline{\varphi}(u, v)^\top \underline{D}\underline{\nu}(\underline{\varphi}(u, v))^\top \underline{D}\underline{\nu}(\underline{\varphi}(u, v)) \underline{D}\underline{\varphi}(u, v))} \\ &= \sqrt{\det(\underline{D}\underline{\varphi}(u, v)^\top) \det(\underline{D}\underline{\nu}(\underline{\varphi}(u, v))^\top \underline{D}\underline{\nu}(\underline{\varphi}(u, v))) \det(\underline{D}\underline{\varphi}(u, v))} \\ &= |\det(\underline{D}\underline{\varphi}(u, v))| \cdot \|\underline{\nu}_u(\underline{\varphi}(u, v)) \times \underline{\nu}_v(\underline{\varphi}(u, v))\|. \end{aligned}$$

Daraus erhält man mit dem Transformationssatz 2.7

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\kappa}} f(\underline{x}) d\underline{x} &= \int_B f(\underline{\kappa}(u, v)) \|\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)\| d(u, v) \\ &= \int_B f(\underline{\nu}(\underline{\varphi}(u, v))) |\det(\underline{D}\underline{\varphi}(u, v))| \cdot \|\underline{\nu}_u(\underline{\varphi}(u, v)) \times \underline{\nu}_v(\underline{\varphi}(u, v))\| d(u, v) \\ &\stackrel{\text{Satz 2.7}}{=} \int_C f(\underline{\nu}(\tilde{u}, \tilde{v})) \|\underline{\nu}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \underline{\nu}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v})\| d(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\underline{\nu}} f(\underline{x}) d\underline{x}, \end{aligned}$$

womit die Aussage für das skalare Oberflächenintegral gezeigt ist. Für das Oberflächenintegral zweiter Art erinnern wir uns zunächst, dass nach Bemerkung 2.27 2. der Einheits-Normalenvektor invariant gegenüber zulässigen Umparametrisierungen ist, d.h.

$$\frac{\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)}{\|\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)\|} = \frac{\underline{\nu}_u(\varphi(u, v)) \times \underline{\nu}_v(\varphi(u, v))}{\|\underline{\nu}_u(\varphi(u, v)) \times \underline{\nu}_v(\varphi(u, v))\|}.$$

Deshalb gilt, erneut wegen des Transformationssatzes,

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\kappa}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_B \langle \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)), \underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v) \rangle d(u, v) \\ &= \int_B \langle \underline{f}(\underline{\nu}(\varphi(u, v))), \underline{\nu}_u(\varphi(u, v)) \times \underline{\nu}_v(\varphi(u, v)) \rangle |\det(\underline{D}\varphi(u, v))| d(u, v) \\ &= \int_C \langle \underline{f}(\underline{\nu}(\tilde{u}, \tilde{v})), \underline{\nu}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \underline{\nu}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle d(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\underline{\nu}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.32 (Oberfläche der Kugel, Oberflächenintegral erster Art).** Wir berechnen die Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt  $\underline{0}$  und Radius  $r$  und verwenden dazu unsere Ergebnisse aus den Beispielen 2.25 und 2.28. Mit  $\underline{\nu} : C := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < r^2\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gegeben durch  $\underline{\nu}(u, v) := (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2})$  aus Beispiel 2.25, ist zunächst nach 2.25 1.

$$\det(\underline{D}\underline{\nu}(u, v)^\top \underline{D}\underline{\nu}(u, v)) = 1 + \frac{u^2}{r^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{r^2 - u^2 - v^2} = \frac{r^2}{r^2 - u^2 - v^2}.$$

Daraus berechnen wir mit Hilfe des Transformationssatzes und Polarkoordinaten, d.h.

$$\underline{\varphi} : \begin{cases} (0, r) \times (0, 2\pi) & \rightarrow C \\ (s, \alpha) & \mapsto (s \cos(\alpha), s \sin(\alpha)) \end{cases},$$

und unter Beachtung von  $\|\underline{\nu}_u \times \underline{\nu}_v\| = \sqrt{\det(\underline{D}\underline{\nu}(u, v)^\top \underline{D}\underline{\nu}(u, v))}$  (vgl. Bemerkungen 2.27 1. und 2.22) die Oberfläche

$$\begin{aligned} \lambda(\partial B_r(\underline{0})) &= 2 \int_{\underline{\nu}} 1 d\underline{x} = 2 \int_C \frac{r}{\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}} d(u, v) = 2 \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{rs}{\sqrt{r^2 - s^2}} d\alpha ds \\ &= 4\pi \int_0^r \frac{rs}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds = -4\pi r \sqrt{r^2 - s^2} \Big|_0^r = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

(Man beachte, dass bei der obigen Integration nur eine Jordan-Nullmenge von  $\partial B_r(\underline{0})$  ausgelassen wird, nämlich der Schnitt von  $\partial B_r(\underline{0})$  mit der  $x$ - $y$ -Ebene.) Auch die alternative Parametrisierung  $\underline{\kappa}(\alpha, \beta) = (r \sin(\alpha) \cos(\beta), r \sin(\alpha) \sin(\beta), r \cos(\beta))$  auf  $B := (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$  lässt sich natürlich zur Berechnung der Fläche verwenden. In Beispiel 2.28 haben wir bereits gesehen, dass

$$\|\underline{\kappa}_\alpha(\alpha, \beta) \times \underline{\kappa}_\beta(\alpha, \beta)\| = r^2 \sin(\alpha)$$

gilt und damit

$$\lambda(\partial B_r(\underline{0})) = 2 \int_{\underline{\kappa}} 1 d\underline{x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\alpha) d\beta d\alpha = 4\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha) d\alpha = 4\pi r^2.$$

Damit haben wir die Kugeloberfläche auf zwei verschiedene Arten und Weisen bestimmt.



**Beispiel 2.33 (Oberflächenintegral zweiter Art).** Wir berechnen den Fluss des Vektorfeldes  $\underline{f}(x, y, z) := (x, y + z, z)$  durch die Fläche  $F := \{(x, y, z) \mid z = 4 - x^2 - y^2, z > 0\}$ . Zunächst parametrisieren wir  $F$  mittels

$$\underline{\kappa} : \begin{cases} B_2(0) & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto (u, v, 4 - u^2 - v^2) \end{cases}.$$

Mit

$$\underline{\kappa}_u(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \underline{\kappa}_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix}, \quad \underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnen wir mit Hilfe des Transformationssatzes

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\kappa}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_{B_2(0)} \left\langle \begin{pmatrix} u \\ 4 + v - u^2 - v^2 \\ 4 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d(u, v) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \\ 4 + r \sin(\alpha) - r^2 \\ 4 - r^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2r \cos(\alpha) \\ 2r \sin(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle r \, d\alpha \, dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} ((4 - r^2)2r \sin(\alpha) + (4 + r^2)) r \, d\alpha \, dr = \int_0^2 2\pi(4r + r^3) \, dr = 24\pi. \end{aligned}$$

## 2.4 Der Satz von Gauß

Der Satz von Gauß ist das mehrdimensionale Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (siehe dazu auch Bemerkung 2.42). Er beschäftigt sich mit der Divergenz eines Vektorfeldes, die wir nun etwas genauer beleuchten wollen. In diesem Abschnitt verwenden wir manchmal ein allgemeines  $d$  (die Dimension des Raumes), und manchmal  $d = 3$ .

**Definition 2.34 (Divergenz).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Gebiet. Für  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^d)$  ist

$$\operatorname{div} \underline{f} := \langle \nabla, \underline{f} \rangle := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_d}{\partial x_d}$$

die Divergenz von  $\underline{f}$ .

Aus der Analysis II ist bekannt, dass für ein  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  der Gradient  $\nabla f$  an jedem Punkt die Richtung des größten Anstieges von  $f$  angibt. Wir kommen nun zur Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes.

**Bemerkung 2.35 (Interpretation der Divergenz).** Sei  $d = 3$  und  $\underline{f}$  ein Vektorfeld. Wir betrachten einen Punkt  $\underline{y}$  und ein ihn umgebendes (kleines) Volumenelement  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial A$ , der hier einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  entspricht. Sei  $\underline{n}$  das Einheits-Normalenfeld von  $\partial A$ . Dann bezeichnet

$$\frac{1}{\lambda(A)} \int_{\partial A} \langle \underline{f}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x}) \rangle d\underline{x}$$

den gemittelten Fluss des Vektorfeldes über den Rand  $\partial A$  in Normalenrichtung, also senkrecht auf  $\partial A$ . Falls diese Größe bei Betrachtung immer kleinerer Volumina  $A \ni \underline{y}$ , d.h. für  $\lambda(A) \rightarrow 0$ , konvergiert, heißt der erhaltene Grenzwert *Quelldichte* des Vektorfeldes  $\underline{f}$  in  $\underline{y}$ .

Sei etwa  $A = \times_{i=1}^d [y_i, y_i + h]$  ein Würfel mit Eckpunkt  $\underline{y}$  und Kantenlänge  $h$ . Der Rand  $\partial A$  wird hier von den Würfelseiten gebildet, die jeweils senkrecht zu einer Koordinatenachse stehen. Die Seitenflächen  $A_{-i}^1$  und  $A_{-i}^2$ , die senkrecht zur  $i$ -ten Koordinatenachse stehen, erhält man durch Fixierung der  $i$ -ten Koordinate auf den Minimalwert  $y_i$  bzw. den Maximalwert  $y_i + h$ , d.h.  $A_{-i}^1 = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_d) \mid \underline{x} \in A\} =: \{(\underline{x}_{-i}, y_i) \mid \underline{x}_{-i} \in A_{-i}\}$  und analog  $A_{-i}^2 = \{(\underline{x}_{-i}, y_i + h) \mid \underline{x}_{-i} \in A_{-i}\}$ . Da die  $i$ -te Koordinatenachse senkrecht auf  $A_{-i}^1$  und  $A_{-i}^2$  steht, ist der (äußere) Einheits-Normalenvektor auf diesen Flächenstücken gerade  $\mp \underline{e}_i$  und damit der Gesamtfluss von  $\underline{f}$  durch  $\partial A$  in der  $i$ -ten Koordinatenrichtung gegeben durch

$$\int_{A_{-i}} \langle \underline{f}(\underline{x}_{-i}, y_i + h) - \underline{f}(\underline{x}_{-i}, y_i), \underline{e}_i \rangle d\underline{x}_{-i}$$

(man kann das auch als „Nettoabfluss durch  $A_{-i}^2$  minus Nettozufluss durch  $A_{-i}^1$ “ lesen). Für  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^d)$  und passend gewählte  $\underline{x}'_{-i} \in A_{-i}$  folgt dann durch (induktive) Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(A)} \int_{\partial A} \langle \underline{f}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x}) \rangle d\underline{x} &= \frac{1}{h^d} \sum_{i=1}^d \int_{A_{-i}} \langle \underline{f}(\underline{x}_{-i}, y_i + h) - \underline{f}(\underline{x}_{-i}, y_i), \underline{e}_i \rangle d\underline{x}_{-i} \\ &= \frac{1}{h^d} \sum_{i=1}^d \langle \underline{f}(\underline{x}'_{-i}, y_i + h) - \underline{f}(\underline{x}'_{-i}, y_i), \underline{e}_i \rangle \cdot h^{d-1} \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{f_i(\underline{x}'_{-i}, y_i + h) - f_i(\underline{x}'_{-i}, y_i)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{y}) = \operatorname{div} \underline{f}(\underline{y}). \end{aligned}$$

Bevor wir zum Satz von Gauß kommen, behandeln wir einfache Spezialfälle.

**Proposition 2.36 (Partielle Integration).** *Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und Jordan-messbar.*

1. Für  $\underline{f} \in \mathcal{C}_c^1(A, \mathbb{R}^d)$  gilt<sup>5</sup>

$$\int_A \operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) d\underline{x} = 0.$$

2. Für  $f \in \mathcal{C}_c^1(A, \mathbb{R})$  und  $g \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$  gilt

$$\int_A \langle \nabla f(\underline{x}), \nabla g(\underline{x}) \rangle d\underline{x} = - \int_A f(\underline{x}) \Delta g(\underline{x}) d\underline{x},$$

wobei  $\Delta g = \operatorname{div} \nabla g = \langle \nabla, \nabla g \rangle = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$  ( $\Delta$  heißt Laplace-Operator).

*Beweis.* 1. Für einen Quader  $Q \supseteq A$  ist nach Definition 1.31  $f_A \in \mathcal{C}_c^1(Q, \mathbb{R}^d)$ , daher genügt es, die Aussage für Quader zu zeigen. Sei also  $Q = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d)$  und  $f \in \mathcal{C}_c^1(Q, \mathbb{R}^d)$ . Wir schreiben dann für  $j = 1, \dots, d$  mit Hilfe des Satzes von Fubini (Satz 1.14)

$$\int_Q \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{Q_{-j}} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\underline{x}) dx_j d\underline{x}_{-j} = \int_{Q_{-j}} \underbrace{f_j(\underline{x}_{-j}, b_j)}_{=0} - \underbrace{f_j(\underline{x}_{-j}, a_j)}_{=0} d\underline{x}_{-j} = 0.$$

Summation über  $j$  auf beiden Seiten liefert die Aussage.

<sup>5</sup>  $\underline{f} \in \mathcal{C}_c^1(A, \mathbb{R}^d)$  bedeutet, dass  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^d)$  gilt und alle  $f_i$  einen kompakten Träger innerhalb von  $A$  haben, d.h.  $\operatorname{supp}(f_i) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid f_i(\underline{x}) \neq 0\} \subseteq A$  für  $1 \leq i \leq d$ . Analog ist  $f \in \mathcal{C}_c^1(A, \mathbb{R})$  definiert.

2. Ähnlich wie in 1. erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\underline{x}) d\underline{x} &= \int_{A_{-j}} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\underline{x}) dx_j d\underline{x}_{-j} \\ &= \int_{A_{-j}} \left[ f(\underline{x}) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\underline{x}) \Big|_{x_j=a_j}^{x_j=b_j} - \int_{a_j}^{b_j} f(\underline{x}) \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\underline{x}) dx_j \right] d\underline{x}_{-j} \\ &= - \int_{A_{-j}} \int_{a_j}^{b_j} f(\underline{x}) \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\underline{x}) dx_j d\underline{x} = - \int_A f(\underline{x}) \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\underline{x}) d\underline{x}. \end{aligned}$$

Summation über  $j$  ergibt dann wie oben die Behauptung.  $\square$

Wir müssen nun noch etwas genauer spezifizieren, in welchen Fällen der Satz von Gauß gelten kann.

**Definition 2.37 (Reguläre und singuläre Randpunkte,  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  offen. Ein Punkt  $\underline{x} \in \partial A$  heißt regulär, wenn es eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  von  $\underline{x}$  und  $h \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  gibt, so dass  $\nabla h(\underline{x}) \neq \underline{0}$  für alle  $\underline{x} \in U$  und  $A \cap U = \{h < 0\}$  gilt.  $\partial_R A$  bezeichne die Menge der regulären Randpunkte, und  $\partial_S A := \partial A \setminus \partial_R A$  ist der singuläre Rand von  $A$ . Ferner heißt  $A$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder, wenn  $\partial_S A$  eine 2-dimensionale Jordan-Nullmenge ist.

**Beispiel 2.38 (Der Quader als  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder).** Jeder Quader  $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$  ist ein  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder, denn: Für  $(b_1, y, z) \in \partial Q$  mit  $y \in (a_2, b_2)$ ,  $z \in (a_3, b_3)$  wähle  $h(x, y, z) = x - b_1$  in einer kleinen Umgebung  $U$  von  $(b_1, y, z)$ . Dann ist  $Q \cap U = \{h < 0\}$  und  $h \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  mit  $\nabla h = (1, 0, 0) \neq \underline{0}$ . Damit sieht man, dass  $\partial_R Q$  aus den (offenen) Seitenflächen des Quaders besteht. Der singuläre Rand entspricht dann den Kanten und Ecken des Quaders, die jedoch eine 2-dimensionale Jordan-Nullmenge bilden.

**Bemerkung 2.39.** Ohne Beweis bemerken wir, dass sich der Rand eines  $\mathcal{C}^1$ -Polyeders „gut“ verhält: Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder mit regulärem Rand  $\partial_R A$ . Dann gibt es auf  $\partial_R A$  genau ein Einheits-Normalenfeld  $\underline{n}$  derart, dass es für jedes  $\underline{x} \in \partial_R A$  ein  $t_0$  gibt, so dass für  $0 < t < t_0$  gilt  $\underline{x} + t\underline{n}(\underline{x}) \notin A$ . Dieses Normalenfeld heißt *äußeres Einheits-Normalenfeld*.

**Beispiel 2.40 (Äußeres Einheits-Normalenfeld bei Graphen).** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  und  $A = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < g(u, v), (u, v) \in U\}$ . Dann ist die obere Randfläche  $\tilde{\partial} A = \{(u, v, g(u, v)) \mid (u, v) \in U\}$ , d.h.  $\underline{\kappa} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$  ist eine Einbettung von  $\tilde{\partial} A$  mit  $\underline{\kappa}_u(u, v) = (1, 0, g_u(u, v))$ ,  $\underline{\kappa}_v(u, v) = (0, 1, g_v(u, v))$ . Damit ist  $\underline{n}$  mit

$$\underline{n} \circ \underline{\kappa} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \underline{n}(\underline{\kappa}(u, v)) = \frac{\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)}{\|\underline{\kappa}_u(u, v) \times \underline{\kappa}_v(u, v)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + g_u(u, v)^2 + g_v(u, v)^2}} \begin{pmatrix} -g_u(u, v) \\ -g_v(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

das äußere Einheits-Normalenfeld, denn: Nach Definition 2.26 ist  $\underline{n} \circ \underline{\kappa}$  ein Einheits-Normalenfeld. Wir betrachten  $(u, v, g(u, v)) + t\sqrt{1 + g_u(u, v)^2 + g_v(u, v)^2} \underline{n}(\underline{\kappa}(u, v)) = (u(t), v(t), z(t))$  mit

$$u(t) = u - tg_u(u, v), \quad v(t) = v - tg_v(u, v), \quad z(t) = g(u, v) + t.$$

Dann gilt (innere Ableitungen beachten!)

$$\frac{d}{dt} (z(t) - g(u(t), v(t))) \Big|_{t=0} = 1 + g_u(u, v)^2 + g_v(u, v)^2 > 0.$$

Daraus folgt nun für kleine  $t > 0$ , dass  $z(t) > g(u(t), v(t))$  und damit  $(u, v, z) + t\underline{n}(\underline{\kappa}(u, v)) \notin A$ , und die Behauptung ist gezeigt.

**Satz 2.41 (Der Satz von Gauß).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder mit äußerem Einheits-Normalenfeld  $\underline{n}$ ,  $B \supseteq \bar{A}$  offen und  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(B, \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt

$$\int_A \operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{\partial A, \underline{n}} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{\partial A} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}.$$

**Bemerkung 2.42 (Der Satz von Gauß für  $d \neq 3$ ).** Der Satz von Gauß gilt ebenso für allgemeine Dimensionen  $d$ . (Wir haben hier allerdings das Integral auf Untermannigfaltigkeiten nur für Kurven und Oberflächen definiert, so dass wir für  $d > 3$  nicht die notwendigen Voraussetzungen haben, ihn zu formulieren.) Man kann den  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder auch abgeschlossen wählen, denn dann ändert man das Integral auf der linken Seite nur auf einer Nullmenge.

Für  $d = 2$  sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand  $\partial A$ , der durch die geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrisiert wird. Außerdem gelte für das äußere Einheits-Normalenfeld

$$\underline{n}(\underline{\gamma}(t)) = \frac{\underline{\eta}(\underline{\gamma}'(t))}{\|\underline{\gamma}'(t)\|} \quad \text{mit } \underline{\eta}(x, y) = (y, -x)$$

(damit liegt  $A$  links von  $\partial A$ ). Dann gilt nach dem Satz von Gauß

$$\int_A \operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{\underline{\gamma}, \underline{n}} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{\underline{\gamma}} \langle \underline{f}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x}) \rangle \, d\underline{x} = \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\eta}(\underline{\gamma}'(t)) \rangle \, dt.$$

Man beachte, dass das letzte Integral *nicht* das Kurvenintegral zweiter Art des Vektorfeldes  $\underline{f}$  über  $\underline{\gamma}$  ist, da hier senkrecht zu  $\underline{\gamma}$  integriert wird!

Für  $d = 1$ ,  $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  und stetig differenzierbares  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $B \supseteq \bar{A}$  offen entspricht  $\operatorname{div} f(x) = f'(x)$ , und  $\partial A = \{a, b\}$ . Die äußere „Normalenrichtung“ im Punkt  $b$  ist dann  $+1$  und in  $a$  entsprechend  $-1$ . In diesem Fall lautet der Satz von Gauß

$$\int_a^b f'(x) \, dx = \int_A \operatorname{div} f(x) \, dx = \int_{\partial A, \underline{n}} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = f(b) - f(a)$$

und entspricht gerade dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Bemerkung 2.43 (Gauß'scher Integralsatz auf Quadern).** Ist  $A = (\underline{a}, \underline{b}) \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Quader, kann man den Satz von Gauß recht elementar beweisen: Ist  $N$  die Menge der Kanten von  $A$ , so ist das äußere Einheits-Normalenfeld gegeben durch (vgl. auch Bemerkung 2.35)

$$\underline{n} : \begin{cases} \partial A & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) & \mapsto \begin{cases} \underline{0}, & \text{falls } \underline{x} \in N, \\ -\underline{e}_i, & \text{falls } \underline{x} \notin N, x_i = a_i, \\ \underline{e}_i, & \text{falls } \underline{x} \notin N, x_i = b_i. \end{cases} \end{cases}$$

Dann erhält man direkt mit Hilfe des Satzes von Fubini (Satz 1.14) und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_A \operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} &= \sum_{i=1}^3 \int_A \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{A_{-i}} \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{x}) \, dx_i \, d\underline{x}_{-i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{A_{-i}} f_i(\underline{x}_{-i}, b_i) - f_i(\underline{x}_{-i}, a_i) \, d\underline{x}_{-i} = \sum_{i=1}^3 \int_{A_{-i} \times \{a_i, b_i\}} \langle \underline{f}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x}) \rangle \, d\underline{x} \\ &= \int_{\partial A} \langle \underline{f}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x}) \rangle \, d\underline{x} = \int_{\partial A} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}. \end{aligned}$$

*Beweisskizze von Satz 2.41.* Wir beweisen hier nur den Spezialfall, dass  $A$  einen glatten Rand hat und von der Form  $A = \{(u, v, z) \mid a < z < g(u, v)\}$  ist mit  $g \in \mathcal{C}^1(U, (a, b))$  und einem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Weiter sei  $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$  für  $x_3 = a$  oder  $(x_1, x_2) \in \partial U$ . Dann ist  $\underline{\kappa}: U \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$  eine Einbettung von  $\partial A \cap \{\underline{f} \neq \underline{0}\}$  (allgemeiner kann man zeigen, dass sich jeder  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder so zerlegen lässt, dass man nur Zerlegungsteile betrachten muss, die – ggf. nach Ummummerierung der Koordinaten – die obige Form haben; Summation über alle diese Teile liefert dann die Behauptung). Wir zeigen zunächst

$$\int_A \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\underline{x}) d\underline{x} = \begin{cases} - \int_U f_1(u, v, g(u, v)) \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) d(u, v), & k = 1, \\ - \int_U f_2(u, v, g(u, v)) \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) d(u, v), & k = 2, \\ \int_U f_3(u, v, g(u, v)) d(u, v), & k = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Für  $k = 3$  folgt dies genau wie in Bemerkung 2.43 mit

$$\int_A \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_U \int_a^{g(u, v)} \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\underline{x}) dx_3 d(x_1, x_2) = \int_U f_3(u, v, g(u, v)) d(u, v),$$

da nach obiger Voraussetzung  $\underline{f}(u, v, a) = \underline{0}$ .

Für  $k = 1$  wählen wir eine Funktion  $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, [0, 1])$  mit

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > \varepsilon, \\ 1 & \text{für } x < -\varepsilon. \end{cases}$$

Dann gilt mit partieller Integration (zuerst nach  $x_1$ , dann nach  $x_3$ ) wie im Beweis von Proposition 2.36

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}) d\underline{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}) \eta_\varepsilon(x_3 - g(x_1, x_2)) d\underline{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A f_1(\underline{x}) \eta'_\varepsilon(x_3 - g(x_1, x_2)) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) d\underline{x} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\underline{x}) \eta_\varepsilon(x_3 - g(x_1, x_2)) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) d\underline{x} \\ &= - \int_U \left( \int_a^{g(u, v)} \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(u, v, x_3) dx_3 \right) \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) d(u, v) \\ &= - \int_U f_1(u, v, g(u, v)) \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) d(u, v). \end{aligned}$$

Der Fall  $k = 2$  folgt ganz analog. Damit ist  $(*)$  gezeigt. Nun folgt die Aussage mit  $\underline{n}$  aus Beispiel 2.40 wegen

$$\begin{aligned} \int_A \operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) d\underline{x} &= \sum_{k=1}^3 \int_A \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\underline{x}) d\underline{x} \\ &= \int_U f_3(u, v, g(u, v)) - f_1(u, v, g(u, v))g_u(u, v) - f_2(u, v, g(u, v))g_v(u, v) d(u, v) \\ &= \int_U \langle \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)), \underline{n}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle \sqrt{1 + g_u(u, v)^2 + g_v(u, v)^2} d(u, v) \\ &= \int_{\partial A} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.44 (Umfang und Fläche eines Kreises).** Wir verwenden den Satz von Gauß in Dimension  $d = 2$  aus Bemerkung 2.42, um einen Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Kreisfläche zu erhalten. Sei hierzu  $A = B_r(\underline{0})$  die (offene) Kreisscheibe mit Radius  $r$  um den Ursprung. Betrachtet man das Vektorfeld  $\underline{f}(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ , so ist  $\int_A \operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_A 1 \, d\underline{x}$  die Fläche des Kreises, also  $\pi r^2$ . Andererseits ist mit  $\underline{\gamma}(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$  für  $t \in (0, 2\pi)$  die rechte Seite im Satz von Gauß wegen  $\underline{\gamma}'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$

$$\int_{\partial A} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 dt = \pi r^2.$$

**Beispiel 2.45 (Fluss eines Vektorfeldes entlang eines Quaders).** Wir berechnen den Fluss des Vektorfeldes

$$\underline{f}(x, y, z) := \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Quaders  $Q = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$ , d.h. das Integral

$$\int_{\partial Q} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}.$$

Nach dem Satz von Gauß ist dies identisch zu

$$\int_Q \operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_Q (z + z) \, d(x, y, z) = abc^2.$$

Die direkte Berechnung des Oberflächenintegrals ist etwas aufwändiger, da der Quader sechs Seiten hat. Wir teilen den Rand entsprechend auf in  $\partial Q = A_1 \cup \dots \cup A_6$  mit

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{0\} \times [0, b] \times [0, c], & A_2 &:= \{a\} \times [0, b] \times [0, c], \\ A_3 &:= [0, a] \times \{0\} \times [0, c], & A_4 &:= [0, a] \times \{b\} \times [0, c], \\ A_5 &:= [0, a] \times [0, b] \times \{0\}, & A_6 &:= [0, a] \times [0, b] \times \{c\}, \end{aligned}$$

für die Seitenflächen des Quaders. Wir berechnen mit den jeweiligen Normalenvektoren

$$\begin{aligned} \int_{A_1} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_0^b \int_0^c \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ yz \\ y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dz dy = 0, \\ \int_{A_2} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_0^b \int_0^c \left\langle \begin{pmatrix} az \\ yz \\ a^2 + y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dz dy = \frac{1}{2} abc^2, \\ \int_{A_3} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_0^a \int_0^c \left\langle \begin{pmatrix} xz \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dz dx = 0, \\ \int_{A_4} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_0^a \int_0^c \left\langle \begin{pmatrix} xz \\ bz \\ x^2 + b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dz dx = \frac{1}{2} abc^2, \\ \int_{A_5} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_0^a \int_0^b \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dy dx = -\frac{1}{3} (a^3 b + ab^3), \end{aligned}$$

$$\int_{A_6} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_0^a \int_0^b \left\langle \begin{pmatrix} xc \\ yc \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dy dx = \frac{1}{3}(a^3b + ab^3),$$

und die Summe aller Integrale ist wieder  $abc^2$ , wie oben.

## 2.5 Der Satz von Stokes

Wir beweisen nun mit Hilfe des Gauß'schen Satzes den Satz von Stokes, der eine Verbindung zwischen Oberflächenintegralen und Wegintegralen (zweiter Art) herstellt. Dieser Satz gilt auch allgemeiner, dann allerdings benötigt man zu dessen Formulierung Differentialformen, die wir hier nicht behandeln wollen. Während beim Gauß'schen Integralsatz die skalare Divergenz eines Vektorfeldes im Mittelpunkt steht, ist dies beim Satz von Stokes die Rotation eines Vektorfeldes, was (zumindest für  $d = 3$ ) wiederum ein Vektorfeld ist.

### Definition 2.46 (Rotation).

1. Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^2)$ . Dann ist

$$\text{rot } \underline{f} := \underline{\nabla} \times \underline{f} := \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = D_1 f_2 - D_2 f_1$$

die Rotation von  $\underline{f}$ .

2. Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^3)$ . Dann ist die Rotation von  $\underline{f}$  gegeben durch

$$\text{rot } \underline{f} := \underline{\nabla} \times \underline{f} := \begin{pmatrix} D_2 f_3 - D_3 f_2, \\ D_3 f_1 - D_1 f_3, \\ D_1 f_2 - D_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 2.47 (Rotation und Gradientenfelder).** In Korollar 2.20 und Proposition 2.21 haben wir bereits festgestellt: Ein auf einem sternförmigen Gebiet definiertes Vektorfeld  $\underline{f}$  ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn es rotationsfrei ist, d.h. wenn  $\underline{\nabla} \times \underline{f} = \underline{0}$ .

**Bemerkung 2.48 (Interpretation der Rotation).** Zur Veranschaulichung des Rotationsbegriffes im Zweidimensionalen sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet,  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^2)$  und  $(u, v) \in A$ . Wir betrachten das Arbeitsintegral des Vektorfeldes  $\underline{f}$  entlang eines  $(u, v)$  umgebenden, geschlossenen (kreisförmigen) Weges  $\underline{\gamma} : I \rightarrow A$  mit  $\underline{\gamma}(t) = (u + \varepsilon \cos(t), v + \varepsilon \sin(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\varepsilon > 0$ , im Verhältnis zu der von  $\underline{\gamma}$  umschlossenen Fläche und lassen dann  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen. Das bedeutet, wir müssen ein Kurvenintegral zweiter Art (vgl. Definition 2.13 und Bemerkung 2.14) entlang einer Kreislinie mit Radius  $\varepsilon$  um  $(u, v)$  ausrechnen. Dazu erinnern wir zuvor nochmals an die Definition der mehrdimensionalen Differenzierbarkeit:  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^2)$  impliziert, dass es für jedes  $\underline{x} \in A$  eine offene Umgebung  $\underline{x} \in U \subseteq A$  gibt, so dass für alle  $\underline{x} + \underline{y} \in U$  gilt

$$\underline{f}(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{Df}(\underline{x}) \cdot \underline{y} + \underline{h}(\underline{y}) \quad \text{mit } \underline{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \frac{\underline{h}(\underline{y})}{\|\underline{y}\|} \xrightarrow{\|\underline{y}\| \rightarrow 0} \underline{0}.$$

Komponentenweise lautet diese Gleichung

$$f_i(\underline{x} + \underline{y}) = f_i(\underline{x}) + \langle \underline{\nabla} f_i(\underline{x}), \underline{y} \rangle + h_i(\underline{y}), \quad i = 1, 2.$$

Mit  $\underline{y}(t) := (\cos(t), \sin(t))$  erhalten wir dann für den Quotienten aus Arbeitsintegral und vom Weg umschlossener Fläche

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^2\pi} \oint_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \frac{1}{\varepsilon^2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} f_1(u + \varepsilon \cos(t), v + \varepsilon \sin(t)) \\ f_2(u + \varepsilon \cos(t), v + \varepsilon \sin(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon \sin(t) \\ \varepsilon \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} f_1(u, v) + \varepsilon \langle \nabla f_1(u, v), \underline{y}(t) \rangle + h_1(\varepsilon \underline{y}(t)) \\ f_2(u, v) + \varepsilon \langle \nabla f_2(u, v), \underline{y}(t) \rangle + h_2(\varepsilon \underline{y}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(u, v), \underline{y}(t) \rangle \\ \langle \nabla f_2(u, v), \underline{y}(t) \rangle \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{h_1(\varepsilon \underline{y}(t))}{\varepsilon\pi} \\ \frac{h_2(\varepsilon \underline{y}(t))}{\varepsilon\pi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(u, v), \underline{y}(t) \rangle \\ \langle \nabla f_2(u, v), \underline{y}(t) \rangle \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_1 f_2(u, v) \cos^2(t) - D_2 f_1(u, v) \sin^2(t) dt \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_1 f_1(u, v) \cos(t) \sin(t) - D_2 f_2(u, v) \sin(t) \cos(t) dt \\
&= D_1 f_2(u, v) - D_2 f_1(u, v) = \operatorname{rot} \underline{f}(u, v).
\end{aligned}$$

Für Gradientenfelder ist, wie oben bemerkt, dieses Verhältnis stets 0. Man kann sich das, lax gesprochen, so vorstellen, dass bei diesen das Vektorfeld „im Mittel senkrecht“ zu dem geschlossenen Weg  $\underline{\gamma}$  steht und daher das Arbeitsintegral verschwindet. Bei Vektorfeldern mit  $\operatorname{rot} \underline{f} \neq 0$  dreht sich dagegen das Vektorfeld ein Stück weit mit dem geschlossenen Weg (oder entgegen), so dass eine positive (oder negative) Gesamtarbeit längs des Weges verrichtet wird. Man interpretiert diese Drehung dann als Wirbel von  $\underline{f}$  um den Punkt  $(u, v)$ . Vektorfelder mit  $\operatorname{rot} \underline{f} \equiv 0$  heißen daher auch *wirbelfrei*, während Vektorfelder mit  $\operatorname{div} \underline{f} \equiv 0$  *quellenfrei* genannt werden (vgl. Bemerkung 2.35). Insbesondere sind also Gradientenfelder wirbelfrei. Wie im Beweis von Korollar 2.20 kann man ebenso leicht zeigen, dass für  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $\underline{f} \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R}^2)$  gilt  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{f}) = \langle \nabla, \nabla \times \underline{f} \rangle \equiv 0$ , d.h. die Rotation eines zweimal stetig differenzierbaren Vektorfeldes ist stets quellenfrei (das gilt genauso im  $\mathbb{R}^3$ ).

Zur Interpretation der Rotation in  $\mathbb{R}^3$  beachte man, dass die zuvor betrachtete zweidimensionale Rotation gerade der  $z$ -Komponente von  $\operatorname{rot} \underline{f}$  im  $\mathbb{R}^3$  entspricht und  $\underline{e}_3$  ein Einheitsnormalenvektor auf dem Gebiet  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ist, den wir mit dem Kreisweg  $\underline{\gamma}$  umrunden haben. Die  $x$ -Komponente von  $\operatorname{rot} \underline{f}$  im  $\mathbb{R}^3$  erhält man ganz analog durch Berechnung von Arbeitsintegralen entlang kreisförmiger Wege in der  $y$ - $z$ -Ebene, zu der  $\underline{e}_1$  ein Normalenvektor ist, und die  $y$ -Komponente von  $\operatorname{rot} \underline{f}$  durch Betrachtung von Arbeitsintegralen in der  $z$ - $x$ -Ebene.

**Satz 2.49 (Satz von Stokes im  $\mathbb{R}^2$ ).** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Polyeder mit (stückweise) glattem Rand  $\partial A$ , d.h. es gibt eine bijektive (stückweise)  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \partial A$ . Außerdem gelte für das äußere Einheits-Normalenfeld

$$\underline{n}(\underline{\gamma}(t)) = \frac{\eta(\underline{\gamma}'(t))}{\|\underline{\gamma}'(t)\|}$$

mit  $\eta(x, y) = (y, -x)$ , so dass  $A$  links von  $\partial A$  liegt. Ist  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^2)$ , so gilt

$$\int_A \operatorname{rot} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_a^b \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle dt \quad \left( = \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle dt \right).$$



*Beweis.* Wir können o.E. einen glatten Rand und eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\gamma}$  betrachten, der stückweise glatte Fall ist bis auf die Summation vollkommen analog. Wegen  $\operatorname{div}(\underline{\eta}(f)) = \operatorname{div}(f_2, -f_1) = \operatorname{rot} f$  und des Satzes von Gauß für  $d = 2$  (siehe Bemerkung 2.42) erhält man

$$\begin{aligned} \int_A \operatorname{rot} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} &= \int_A \operatorname{div}(\underline{\eta}(f))(\underline{x}) \, d\underline{x} \\ &= \int_a^b \langle \underline{\eta}(f(\underline{\gamma}(t))), \underline{\eta}(\underline{\gamma}'(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} f_2(\underline{\gamma}(t)) \\ -f_1(\underline{\gamma}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

□

**Satz 2.50 (Satz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ ).** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  offen,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $\underline{\kappa} : A \rightarrow B$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Einbettung einer Fläche  $F := \underline{\kappa}(A)$ . Weiter habe  $A$  einen (stückweise) glatten Rand  $\partial A$ , der durch eine bijektive (stückweise)  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\underline{\beta} : [a, b] \rightarrow \partial A$  mit  $a < b$  parametrisiert ist, so dass  $A$  links von  $\partial A$  liegt. Für die Parametrisierung  $\underline{\gamma} = \underline{\kappa} \circ \underline{\beta}$  von  $\partial F$ ,  $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(B, \mathbb{R}^3)$  und das Einheits-Normalenfeld  $\underline{n}$  von  $F$  aus Definition 2.26 gilt dann

$$\int_{\underline{\kappa}} \operatorname{rot} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{F, \underline{n}} \operatorname{rot} \underline{f}(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}.$$

*Beweis.* Wie oben sei o.E.  $\partial A$  glatt. Zunächst eine Vorüberlegung: Es gilt

$$(\underline{D}\underline{\kappa})^\top \cdot (\underline{f} \circ \underline{\kappa}) = \begin{pmatrix} D_1\kappa_1 & D_1\kappa_2 & D_1\kappa_3 \\ D_2\kappa_1 & D_2\kappa_2 & D_2\kappa_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \circ \underline{\kappa} \\ f_2 \circ \underline{\kappa} \\ f_3 \circ \underline{\kappa} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Mit der Abkürzung  $D_i\underline{\kappa} = (D_i\kappa_1, D_i\kappa_2, D_i\kappa_3)$  (und analog  $D_i\underline{f}$ ) sowie dem Satz von Stokes für  $d = 2$  (Satz 2.49) erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_a^b \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \underline{f}(\underline{\kappa}(\underline{\beta}(t))), \underline{D}\underline{\kappa}(\underline{\beta}(t)) \cdot \underline{\beta}'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle (\underline{D}\underline{\kappa}(\underline{\beta}(t)))^\top \cdot \underline{f}(\underline{\kappa}(\underline{\beta}(t))), \underline{\beta}'(t) \rangle dt \\ &\stackrel{2.49}{=} \int_A \operatorname{rot} [(\underline{D}\underline{\kappa}(u, v))^\top \cdot \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v))] \, d(u, v) \\ &= \int_A D_1 [\langle D_2\underline{\kappa}(u, v), \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle] - D_2 [\langle D_1\underline{\kappa}(u, v), \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle] \, d(u, v) \\ &= \int_A [\langle D_1 D_2 \underline{\kappa}(u, v), \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle + \langle D_2 \underline{\kappa}(u, v), D_1 \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle \\ &\quad - \langle D_2 D_1 \underline{\kappa}(u, v), \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle - \langle D_1 \underline{\kappa}(u, v), D_2 \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle] \, d(u, v) \\ &= \int_A \langle D_2 \underline{\kappa}(u, v), D_1 \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle - \langle D_1 \underline{\kappa}(u, v), D_2 \underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \rangle \, d(u, v) \\ &= \int_A [\langle D_2 \underline{\kappa}(u, v), \underline{D}\underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \cdot D_1 \underline{\kappa}(u, v) \rangle \\ &\quad - \langle D_1 \underline{\kappa}(u, v), \underline{D}\underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \cdot D_2 \underline{\kappa}(u, v) \rangle] \, d(u, v) \\ &= \int_A \langle D_1 \underline{\kappa}(u, v), (\underline{D}\underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)))^\top - \underline{D}\underline{f}(\underline{\kappa}(u, v)) \cdot D_2 \underline{\kappa}(u, v) \rangle \, d(u, v). \end{aligned}$$

Nun ist (unter Weglassung des Argumentes  $(u, v)$  zur besseren Übersichtlichkeit)

$$\begin{aligned}
& \langle D_1 \underline{\kappa}, (\underline{D} f(\underline{\kappa})^\top - \underline{D} f(\underline{\kappa})) \cdot D_2 \underline{\kappa} \rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} D_1 \kappa_1 \\ D_1 \kappa_2 \\ D_1 \kappa_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & D_1 f_2(\underline{\kappa}) - D_2 f_1(\underline{\kappa}) & D_1 f_3(\underline{\kappa}) - D_3 f_1(\underline{\kappa}) \\ D_2 f_1(\underline{\kappa}) - D_1 f_2(\underline{\kappa}) & 0 & D_2 f_3(\underline{\kappa}) - D_3 f_2(\underline{\kappa}) \\ D_3 f_1(\underline{\kappa}) - D_1 f_3(\underline{\kappa}) & D_3 f_2(\underline{\kappa}) - D_2 f_3(\underline{\kappa}) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_2 \kappa_1 \\ D_2 \kappa_2 \\ D_2 \kappa_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (D_2 f_3(\underline{\kappa}) - D_3 f_2(\underline{\kappa}))(D_1 \kappa_2 D_2 \kappa_3 - D_1 \kappa_3 D_2 \kappa_2) \\
&\quad + (D_3 f_1(\underline{\kappa}) - D_1 f_3(\underline{\kappa}))(D_1 \kappa_3 D_2 \kappa_1 - D_1 \kappa_1 D_2 \kappa_3) \\
&\quad + (D_1 f_2(\underline{\kappa}) - D_2 f_1(\underline{\kappa}))(D_1 \kappa_1 D_2 \kappa_2 - D_1 \kappa_2 D_2 \kappa_1) \\
&= \langle \underline{\text{rot}} f(\underline{\kappa}), D_1 \underline{\kappa} \times D_2 \underline{\kappa} \rangle.
\end{aligned}$$

Mit  $\underline{n}$  aus Definition 2.26 und der Definition des Oberflächenintegrals zweiter Art (vgl. Definition 2.29) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{\underline{\gamma}} f(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_A \langle \underline{\text{rot}} f(\underline{\kappa}(u, v)), D_1 \underline{\kappa}(u, v) \times D_2 \underline{\kappa}(u, v) \rangle d(u, v) \\
&= \int_{\underline{\kappa}} \underline{\text{rot}} f(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{F, \underline{n}} \underline{\text{rot}} f(\underline{x}) d\underline{x},
\end{aligned}$$

und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

**Beispiel 2.51.** Wir wollen den Satz von Stokes anhand eines Beispiels demonstrieren. Hierzu sei  $F$  die obere Halbkugelfläche aus Beispiel 2.25 und  $\underline{f}(x, y, z) = (2x - y, -yz^2, -y^2z)$ . Wir berechnen beide Seiten im Satz von Stokes getrennt. Zunächst ist

$$\underline{\text{rot}} \underline{f}(x, y, z) = \underline{\nabla} \times \begin{pmatrix} 2x - y \\ -yz^2 \\ -y^2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2yz + 2yz \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner ist

$$\underline{\kappa}: \begin{cases} A := (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \beta) & \mapsto (r \sin(\alpha) \cos(\beta), r \sin(\alpha) \sin(\beta), r \cos(\alpha)) \end{cases}$$

eine Parametrisierung der oberen Halbkugelfläche mit Radius  $r$ . Nach Beispiel 2.28 ist

$$\underline{\kappa}_\alpha(\alpha, \beta) \times \underline{\kappa}_\beta(\alpha, \beta) = r \sin(\alpha) \underline{\kappa}(\alpha, \beta).$$

Man beachte, dass der Rand  $\partial F$  der oberen Halbkugel nur durch das Teilstück  $\{\frac{\pi}{2}\} \times [0, 2\pi]$  des Randes  $\partial A$  gebildet wird, d.h.  $\partial F = \underline{\kappa}(\{\frac{\pi}{2}\} \times [0, 2\pi])$ . (Die anderen Teile von  $\partial A$  sind lediglich der Parametrisierung geschuldet, bei der wir ja nach Beispiel 2.9 eine Jordan-Nullmenge entfernen.) Nun ist  $\partial F$  gerade die Kreislinie mit Radius  $r$  um den Ursprung in der  $x$ - $y$ -Ebene, die parametrisiert ist durch die  $\mathcal{C}^1$ -Kurve

$$\underline{\gamma}: \begin{cases} [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \beta & \mapsto (r \cos(\beta), r \sin(\beta), 0). \end{cases}$$

Für die linke Seite im Satz von Stokes ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\kappa}} \underline{\operatorname{rot}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_A \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \sin(\alpha) \begin{pmatrix} r \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ r \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ r \cos(\alpha) \end{pmatrix} \right\rangle d(\alpha, \beta) \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha) \cos(\alpha) d\beta d\alpha \\ &= \pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(\alpha) \cos \alpha d\alpha = \pi r^2 \sin^2(\alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(\beta)), \underline{\gamma}'(\beta) \rangle d\beta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 2r \cos(\beta) - r \sin(\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin(\beta) \\ r \cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\beta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} -2 \cos(\beta) \sin(\beta) + \sin^2(\beta) d\beta = r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\beta) d\beta = \pi r^2. \end{aligned}$$

Somit haben wir den Satz von Stokes in diesem Spezialfall verifiziert. Im Allgemeinen ist die linke Seite im Satz von Stokes oft schwer auszurechnen, da diese ja über irgendeine Fläche berechnet werden kann, die von  $\underline{\gamma}$  berandet wird. Sofern verschiedene Flächen jedoch dieselbe Randkurve  $\underline{\gamma}$  besitzen (und korrekt orientiert sind), müssen nach dem Satz von Stokes die Oberflächenintegrale zweiter Art über die Rotation eines Vektorfeldes übereinstimmen, denn dann ist das Wegintegral auf der rechten Seite für alle Flächen stets dasselbe.

### 3 Funktionentheorie

In der Funktionentheorie geht es um Funktionen  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die *komplex differenzierbar* sind. Solche Funktionen nennt man auch *holomorph auf  $U$* . Obwohl die komplexe Differenzierbarkeit völlig analog zur reellen Differenzierbarkeit definiert ist, führt sie zu erstaunlichen Implikationen. Wir werden beispielsweise zeigen, dass jede komplex differenzierbare Funktion in einer Potenzreihe darstellbar und damit beliebig oft komplex differenzierbar ist; siehe Satz 3.35. (Man erinnere sich aus der Analysis daran, dass dies für reell differenzierbare Funktionen nicht gilt.) Die Funktionentheorie stellt darüber hinaus auch Beweise und Berechnungsmethoden für andere Bereiche der Mathematik bereit. Wie werden etwa reelle Integrale durch Mittel der Funktionentheorie berechnen, indem wir sie durch Wegintegrale in der komplexen Zahlenebene approximieren und den Cauchyschen Integralsatz oder die Cauchysche Integralformel verwenden; siehe Beispiele 3.19, 3.20, 3.33 und 3.34. Außerdem gibt es einen schönen, besonders kurzen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (der besagt, dass jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt); siehe Korollar 3.45.

#### Kurze Wiederholung zu komplexen Zahlen

Bevor wir in die Funktionentheorie einsteigen, wiederholen wir die wichtigsten Eigenschaften komplexer Zahlen, Konvergenzkriterien und den komplexen Logarithmus.

**Einführung der komplexen Zahlen:** Erweiterungen von Zahlbereichen werden oft damit begründet, dass nur in der Erweiterung gewisse Gleichungen eine Lösung besitzen. Etwa hat die Gleichung  $x + 1 = 0$  in  $\mathbb{N}$  keine Lösung, die Gleichung  $2x = 3$  hat in  $\mathbb{Z}$  keine Lösung, die Gleichung  $x^2 = 2$  hat in  $\mathbb{Q}$  keine Lösung. Dies führt der Reihe nach zur Einführung der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  und der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Nun hat jedoch die Gleichung  $x^2 = -1$  in  $\mathbb{R}$  keine Lösung, was die Erweiterung der reellen zu den komplexen Zahlen notwendig macht, oder sie mindestens motiviert. *Man postuliert dazu, dass die Gleichung  $x^2 = -1$  eine Lösung  $i$  (imaginäre Einheit) besitzt.*

**Die komplexe Zahlenebene:** Wir werden die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  mit der Zahlenebene  $\mathbb{R}^2$  gleichsetzen (diese bezeichnet man dann auch als *Gaußsche Zahlenebene*), indem wir  $\mathbb{C}$  als zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum über der Basis  $\{1, i\}$  auffassen, so dass sich eine komplexe Zahl  $z$  auch als  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  schreiben lässt.  $x$  und  $y$  werden *Real-* bzw. *Imaginärteil von  $z$*  genannt und auch mit  $x =: \Re(z)$  und  $y =: \Im(z)$  bezeichnet werden. Wir werden daher im Folgenden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x + iy \in \mathbb{C}$  identifizieren. Durch die Übernahme der euklidischen Norm im  $\mathbb{R}^2$  als Betragsfunktion in  $\mathbb{C}$  wird  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  zu einem normierten (also auch metrischen) Raum mit  $|z| = |x + iy| := \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , in dem die Dreiecksungleichung gilt ( $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ). Insbesondere kann man damit auch auf  $\mathbb{C}$  konvergente Folgen und (absolut) konvergente Reihen betrachten.

**Die komplexen Zahlen als Körper:** Wichtig ist es zu bemerken, dass  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ein Körper ist. Die Rechenregeln sind wie folgt:

$$\begin{aligned}(x + iy) + (x' + iy') &= (x + x') + i(y + y'), \\ (x + iy)(x' + iy') &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y).\end{aligned}$$

Man addiert, multipliziert und klammert also nach genau denselben Rechenregeln, die man schon von den reellen Zahlen kennt, und muss nur beachten, dass definitionsgemäß  $i^2 = -1$  ist. In einem Körper gibt es stets auch inverse Elemente bzgl. der Addition und der Multiplikation. Das additive Inverse zu  $z \in \mathbb{C}$  ist  $-z = -x - iy$ , denn nach den obigen Regeln gilt offensichtlich  $z + (-z) = 0 + i0 = 0$ . Für das multiplikative Inverse betrachtet man zunächst die *konjugiert-komplexe Zahl*  $\bar{z} := x - iy$ . Nach der Multiplikationsregel gilt  $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ . Damit sieht man leicht, dass für jedes  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  das multiplikative Inverse  $z^{-1}$  gegeben ist durch  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ , denn  $zz^{-1} = 1 + i0 = 1$ , wobei wir wie zuvor komplexe Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil ( $\Im(z) = 0$ ) mit reellen Zahlen gleichsetzen. Analog schreiben wir rein imaginäre Zahlen  $z = 0 + iy$  oft als  $z = iy$ .

**Konvergenz komplexer Folgen:** Da mit  $|\cdot|$  wie oben beschrieben eine Norm auf  $\mathbb{C}$  zur Verfügung steht, kann man konvergente und Cauchy-Folgen in  $\mathbb{C}$  ganz analog wie in  $\mathbb{R}$  definieren. Ist  $(z_n)_{n \geq 1} = (x_n + iy_n)_{n \geq 1}$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = x + iy$ , so folgt wegen  $|x_n - x| = |\Re(z_n - z)| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |z_n - z|$ , dass mit  $z_n \rightarrow z$  (in  $\mathbb{C}$ ) auch  $x_n \rightarrow x$  und analog  $y_n \rightarrow y$  (in  $\mathbb{R}$ ) gilt. Wendet man umgekehrt die Dreiecksungleichung auf die komplexen Zahlen  $a_n = \Re(z_n - z) = x_n - x + i0$  und  $b_n = i\Im(z_n - z) = 0 + i(y_n - y)$  an, so folgt  $|z_n - z| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| = |x_n - x| + |y_n - y|$ . Somit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \Re(z)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Im(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y = \Im(z)$ . Damit lassen sich die aus Analysis I bekannten Rechenregeln für Grenzwerte direkt ins Komplexe übertragen. Ferner gelten die Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen (Majoranten- und Quotientenkriterium) genauso auch in  $\mathbb{C}$ , die Beweise lassen sich praktisch unverändert übernehmen. Ganz analog wie oben sieht man auch, dass eine Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  komplexer Zahlen genau dann eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$  ist, wenn die Folgen  $(\Re(z_n))_{n \geq 1}$  und  $(\Im(z_n))_{n \geq 1}$  der Real- und Imaginärteile Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  sind. Da nach dem Vollständigkeitsaxiom jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  konvergiert, folgt damit sofort, dass auch jede komplexe Cauchy-Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{C}$  konvergiert, d.h. auch die komplexen Zahlen sind vollständig.

Obwohl man, wie gesehen, mit komplexen Zahlen ganz ähnlich rechnen kann wie mit reellen, ist jedoch zu beachten, dass die für  $\mathbb{R}$  bekannten Anordnungsaxiome (d.h. die Regeln für die Ordnungsrelationen  $<$  und  $>$ ) in  $\mathbb{C}$  *nicht* gelten! Eine Folgerung aus den reellen Anordnungsaxiomen ist, dass für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt  $x^2 > 0$ . In  $\mathbb{C}$  dagegen ist z.B.  $0 \neq i = 0 + i1$ , aber  $i^2 = -1 < 0$ . Aussagen wie  $z_1 > z_2$  machen daher für beliebige  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  keinen Sinn, vergleichen lassen sich nur die Beträge  $|z_1|$  und  $|z_2|$ , die ja reelle Zahlen sind.

**Polarkoordinaten:** Wie zuvor im  $\mathbb{R}^2$  (siehe Beispiel 2.8) kann man auch in der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  Polarkoordinaten einführen. Um dies vorzubereiten, begründen wir zunächst die Eulersche Formel

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei  $e^z$  genau wie im Reellen durch die (absolut konvergente) Exponentialreihe  $e^z := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  definiert ist (damit gilt auch im Komplexen die bekannte Eigenschaft  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ ). Wählt man nun speziell  $z = it$ , so kann man  $i$  als konstanten Faktor ansehen, wie im Reellen nach  $t$  ableiten und erhält  $\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it}$ . Nach der Quotientenregel der Differentiation folgt damit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\cos(t) + i \sin(t)}{e^{it}} \right) = \frac{e^{it}(-\sin(t) + i \cos(t)) - ie^{it}(\cos(t) + i \sin(t))}{e^{2it}} = 0,$$

also ist der Quotient konstant in  $t$ . Da für  $t = 0$  gilt  $e^{i0} = e^0 = 1 = \cos(0) + i \sin(0)$ , muss er stets gleich 1 sein und damit

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

gelten. Für  $t = \pi$  erhält man die berühmte Formel

$$e^{i\pi} = -1.$$

Zur Darstellung einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  in Polarkoordinaten setzt man  $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\varphi := \arg(z) \in [-\pi, \pi)$  als den Winkel, den die Strecke von 0 bis  $z$  (d.h. die Strecke mit den Endpunkten  $(0, 0)$  und  $(x, y)$  im  $\mathbb{R}^2$ ) mit der reellen  $x$ -Achse einschließt. Dann hat  $(x, y)$  nach Beispiel 2.8 in Polarkoordinaten die Darstellung  $(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ , und mit  $(x, y) \cong z = x + iy$  folgt dann, zusammen mit der Euler-Formel,  $z = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = re^{i\varphi}$ ; insbesondere gilt  $\Re(z) = r \cos(\varphi)$  und  $\Im(z) = r \sin(\varphi)$ .

In Polarkoordinaten ist die Multiplikation komplexer Zahlen übrigens besonders einfach. Für  $z = re^{i\varphi}$  und  $z' = r'e^{i\varphi'}$  ist  $zz' = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}$ , d.h. die Radien multiplizieren und die Winkel addieren sich.

**Die Multiplikation in Matrix-Schreibweise:** Um die Multiplikation noch einmal von einer anderen Seite zu beleuchten, betrachten wir die lineare Abbildung  $z \mapsto cz$  für ein  $c = a + ib \in \mathbb{C}$ . Mit der Identifikation  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  muss sich diese auch als lineare Abbildung  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  darstellen lassen, d.h. es muss eine  $2 \times 2$ -Matrix  $\underline{A}$  existieren, so dass  $g(\underline{x}) = \underline{A}\underline{x}$ . Um die Matrixdarstellung von  $z \mapsto cz$  für  $c \in \mathbb{C}$  zu erhalten, bemerken wir, dass

$$cz = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx) \cong \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass eine Matrixmultiplikation im  $\mathbb{R}^2$  genau dann die Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $c = a + ib \in \mathbb{C}$  darstellt, wenn die Matrix von der Form  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  ist.

**Der komplexe Logarithmus:** Wir haben zuvor die Einführung von komplexen Zahlen damit motiviert, dass gewisse Gleichungen eine Lösung haben bzw. bekommen sollen. Betrachten wir für einen Moment die Gleichung  $e^x = y$  für  $y \in \mathbb{R}$ , so wissen wir, dass diese zumindest für  $y > 0$  eine eindeutige Lösung  $x$  hat, die gewöhnlich mit  $\log(y)$  bezeichnet wird. Doch wie verhält es sich mit der Lösung der Gleichung  $e^z = w$  für beliebige  $w \in \mathbb{C}$ ? Zunächst ist zu beachten, dass mit  $z$  auch  $z + i2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , eine Lösung ist, da nach der Euler-Formel gilt  $e^{i2k\pi} = 1$ . Um die Existenz einer Umkehrfunktion von  $e^z$  sicherzustellen, müssen wir also den Definitions- oder Wertebereich von  $z \mapsto e^z$  geeignet einschränken.

Dazu beachte man, dass die Darstellung  $w = |w|e^{i\arg(w)}$  von  $w \in \mathbb{C}$  in Polarkoordinaten eindeutig ist, wenn wir  $|w| > 0$  und wie oben  $\arg(w) \in [-\pi, \pi)$  fordern. Damit lässt sich die Lösung von  $e^z = w$  leicht angeben: Mit  $z = x + iy$  und der Polarkoordinatendarstellung von  $w$  lautet die Gleichung  $e^{x+iy} = |w|e^{i\arg(w)}$ , also muss gelten  $e^x = |w|$ , d.h.  $x = \log(|w|)$ , und  $y = \arg(w)$ . Man bezeichnet  $\log(w) := \log(|w|) + i\arg(w)$  als *Hauptzweig des komplexen Logarithmus*, der prinzipiell für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  definiert ist. Allerdings ist dieser wegen der Festsetzung  $\arg(w) \in [-\pi, \pi)$  unstetig auf der negativen reellen Halbachse  $\mathbb{R}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0, \Im(z) = 0\}$ . Um eine stetige Abbildung zu erhalten, schränkt man den Hauptzweig des komplexen Logarithmus typischerweise ein auf die *geschlitzte komplexe Ebene*

$$\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \mid \Re(z) \leq 0, \Im(z) = 0\}.$$

### 3.1 Holomorphe Funktionen

Alle Resultate der Funktionentheorie basieren auf der komplexen Differenzierbarkeit (die man auch Holomorphie nennt). Diese ist genauso wie die reelle Differenzierbarkeit definiert.

**Definition 3.1 (Komplex differenzierbar, holomorph).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann heißt  $f$  in  $z \in U$  komplex differenzierbar, falls

$$f'(z) := \lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

existiert. Ist  $f$  für jedes  $z \in U$  komplex differenzierbar, so heißt  $f$  in  $U$  holomorph. Ist  $U = \mathbb{C}$  und  $f$  in  $\mathbb{C}$  holomorph, so heißt  $f$  auch ganze Funktion.

**Bemerkung 3.2 (Rechenregeln).** Da die komplexe Differenzierbarkeit genauso definiert ist wie für reellwertige Funktionen, gelten auch dieselben Rechenregeln: Sind  $f, g$  in geeigneten Punkten komplex differenzierbar, so auch  $f + g, fg, \frac{f}{g}$  und  $f \circ g$ , und es gilt

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g', & (fg)' &= f'g + fg', \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}, & (g \circ f)' &= (g' \circ f)f'. \end{aligned}$$

Damit haben wir auch schon eine Vielzahl an Beispielen komplex differenzierbarer Funktionen. Da  $z \mapsto z$  offenbar eine ganze Funktion ist, folgt induktiv aus der Summen- und Produktregel, dass auch alle Polynome ganze Funktionen sind. Ferner sind auch alle rationalen Funktionen  $\frac{f}{g}$ , wobei  $f, g$  Polynome sind, zumindest außerhalb der Nullstellen von  $g$  komplex differenzierbar.

Die Definition der komplexen Differenzierbarkeit sieht auf den ersten Blick genauso aus wie für reellwertige Funktionen. Allerdings ist zu beachten, dass es für den Grenzwert  $z' \rightarrow z$  in der Definition der komplexen Differenzierbarkeit viele Richtungen zu berücksichtigen gilt. Es könnte sich beispielsweise  $z'$  parallel zur imaginären Achse an  $z$  annähern (d.h.  $\Re(z') \equiv \Re(z)$  und  $\Im(z') \rightarrow \Im(z)$ ) oder parallel zur reellen Achse oder auch spiralenförmig auf  $z$  zulaufen, und stets muss dasselbe Ergebnis für  $f'(z)$  herauskommen. Dies führt auf einen Zusammenhang zwischen der reellen und komplexen Differenzierbarkeit, der durch die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen beschrieben wird. Bei diesen identifizieren wir wieder komplexe Zahlen  $z = x + iy$  mit Punkten  $(x, y)$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

**Satz 3.3 (Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit Realteil  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  und Imaginärteil  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  genau dann in  $U$  holomorph, wenn  $u, v$  reell differenzierbar auf  $U$  sind und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllen.

*Beweis.* Ist  $f$  in  $z$  komplex differenzierbar, so muss gelten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z) - f'(z)h}{h} =: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0,$$

woraus sich durch Umformen  $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + \varphi(h)$  ergibt. Da die Multiplikation mit einer komplexen Zahl (hier  $f'(z)$ ) eine lineare Abbildung ist, folgt daraus mit  $z = x + iy$  und  $h = h_1 + ih_2$  durch Betrachtung der Realteile

$$u(x+h_1, y+h_2) = u(x, y) + \underline{A}_{\Re}(h_1, h_2)^T + \Re(\varphi(h_1, h_2))$$

mit einer  $1 \times 2$ -Matrix  $\underline{A}_{\Re}$ .  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$  impliziert  $\frac{|\varphi(h)|}{|h|} \rightarrow 0$  und somit auch  $\frac{\Re(\varphi(h_1, h_2))}{\|(h_1, h_2)\|} \rightarrow 0$  für  $\|(h_1, h_2)\| \rightarrow 0$  nach den Vorüberlegungen zur Konvergenz in  $\mathbb{C}$ . Dies zeigt, dass  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  reell differenzierbar ist. Die reelle Differenzierbarkeit von  $v$  folgt analog.

Die komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  in  $z = x + iy$  impliziert ferner, dass für reelle  $h$  gelten muss

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}.$$

Insbesondere müssen also die Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten übereinstimmen. Die Realteile beider Seiten sind aber

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h} = \frac{\partial v}{\partial y}(z),$$

und für die Imaginärteile erhält man analog (beachte  $\frac{1}{i} = -i$ , denn  $-i \cdot i = -i^2 = 1$ )

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} = - \frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

Es bleibt zu zeigen, dass auch die Umkehrung gilt, d.h. die reelle Differenzierbarkeit und die Gültigkeit der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen impliziert die Holomorphie von  $f$ . Sind  $u$  und  $v$  reell differenzierbar und erfüllen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, ist  $f$  mit der Identifikation  $f(z) = f(x+iy) = \underline{f}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  als Funktion  $\underline{f} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  reell differenzierbar mit Jacobi-Matrix

$$\underline{Df}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix},$$

und es gilt  $\underline{f}(x+h) = \underline{f}(x) + \underline{Df}(x) \cdot \underline{h} + \varphi(\underline{h})$  mit  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\frac{\varphi(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} \rightarrow \underline{0}$  für  $\|\underline{h}\| \rightarrow 0$ . Geht man nun wieder ins Komplexe über und setzt  $\underline{h} = (h_1, h_2) \cong h_1 + ih_2 =: h \in \mathbb{C}$ , so entspricht nach der Vorbemerkung über die komplexe Multiplikation in Matrixschreibweise der Term  $\underline{Df}(x) \cdot \underline{h}$  gerade der Multiplikation von  $h$  mit der komplexen Zahl

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z) =: c(z),$$

so dass die obige Gleichung im Komplexen  $f(z+h) = f(z) + c(z)h + \varphi(h)$  lautet mit  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\frac{\varphi(h)}{|h|} \rightarrow 0$  für  $|h| \rightarrow 0$ . Mit  $z' := z + h$  folgt

$$\left| \frac{f(z') - f(z) - c(z)(z' - z)}{z' - z} \right| = \left| \frac{\varphi(z' - z)}{z' - z} \right| \xrightarrow{z' \rightarrow z} 0,$$

also ist  $f$  in  $z = x + iy$  komplex differenzierbar mit  $\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} = c(z) = f'(z)$ .  $\square$



**Beispiel 3.4 (Eine einfache nicht-holomorphe Funktion).** Die Konjugationsabbildung  $z \mapsto \bar{z}$  ist nicht holomorph, denn hier ist  $f = u + iv$  mit  $u(x, y) = x, v(x, y) = -y$  und damit  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$ , so dass die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen nicht erfüllt sind.

Sicherlich ist eine reell-differenzierbare Funktion  $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nicht allein schon durch die Werte  $f_i(x, y)$  in einer Koordinatenrichtung ( $i = 1$  oder  $i = 2$ ) eindeutig bestimmt. Ist diese Funktion, aufgefasst als  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , jedoch holomorph, führen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen dazu, dass bereits der Realteil  $\Re(f)$  oder der Imaginärteil  $\Im(f)$  die gesamte Funktion  $f$  bis auf eine additive Konstante eindeutig festlegen.

**Korollar 3.5.** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f, g$  holomorph mit  $\Re(f) = \Re(g)$  (oder  $\Im(f) = \Im(g)$ ). Dann ist  $f = g + ic$  (bzw.  $f = g + c$ ) für ein  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage nur für den Realteil, da die Aussage für den Imaginärteil analog folgt. Für die holomorphe Funktion  $h := f - g = u + iv$  ist  $u \equiv 0$ . Mit den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen folgt damit  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$  und ebenso  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ , also ist  $v(x, y) \equiv c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Wir haben bereits Polynome und rationale Funktionen als holomorphe Funktionen erkannt. Nun betrachten wir als deren Erweiterung Potenzreihen, also Polynome unendlichen Grades. Zur Vereinfachung betrachten wir diese um den Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ , also

$$p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}$  (im allgemeinen Fall ersetzt man  $z$  durch  $z - z_0$ ). Wie wir in Proposition 3.8 sehen werden, stellen diese innerhalb ihres Konvergenzradius holomorphe Funktionen dar. Zunächst wiederholen wir den Begriff des Konvergenzradius aus der Analysis.

**Proposition 3.6 (Konvergenzradius).** *Sei  $p$  eine Potenzreihe um  $z_0 = 0$  und*

$$\rho := \rho(p) := \sup\{|z| \mid p(z) \text{ konvergiert}\}.$$

*Dann ist  $p(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \rho$  absolut konvergent, und für alle  $z$  mit  $|z| > \rho$  divergent. Die Größe  $\rho$  heißt Konvergenzradius von  $p$ .*

*Beweis.* Der Beweis verläuft genau wie im Reellen: Konvergiert  $p(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ , so müssen die Summanden  $a_n z_1^n$  eine Nullfolge bilden (denn Konvergenz im Komplexen ist äquivalent zur (reellen) Konvergenz der Real- und Imaginärteile). Daher existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $|a_n z_1^n| < c$  für alle  $n \geq 0$ . Ist nun  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < |z_1|$ , so konvergiert auch  $p(z)$ , sogar absolut nach dem Majorantenkriterium, denn nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|p(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq c \sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty, \quad \text{da } q := \left| \frac{z}{z_1} \right| < 1.$$

Daraus folgt, dass  $p(z)$  für alle  $0 \leq r < \rho$  auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$  absolut konvergiert.

Sei nun  $z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $|z_2| > \rho$ . Angenommen,  $p(z_2)$  wäre konvergent. Dann wäre nach dem Vorhergehenden  $p(z)$  für alle  $z$  mit  $\rho < |z| < |z_2|$  absolut konvergent, im Widerspruch zur Definition des Konvergenzradius.  $\square$

**Bemerkung 3.7 (Berechnung des Konvergenzradius).** Der Konvergenzradius kann durch  $\rho^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  berechnet werden, falls der (zumindest uneigentliche) Grenzwert existiert, oder alternativ auch durch die stets anwendbare Cauchy-Hadamard-Formel

$$\rho^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

(wobei  $\frac{1}{0} = \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$ ). Letztere sieht man wie folgt: Sei  $L^{-1} := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$  und  $0 \leq r < L$ , dann ist  $r^{-1} > \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ , und aus der Definition des limes superior ( $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k$ ) folgt, dass ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $r^{-1} > |a_n|^{\frac{1}{n}}$  für alle  $n \geq n_0$ . Folglich ist  $|a_n| r^n$  beschränkt, so dass wie im Beweis von Proposition 3.6  $\sum_{n \geq 0} |a_n| s^n < \infty$  für alle  $0 \leq s < r$ , also ist  $p(z)$  (absolut) konvergent für alle  $z$  mit  $|z| < r < L$  und damit  $\rho \geq L$ .

Ist nun  $L < r < \infty$  und damit  $r^{-1} < \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ , so existiert nach Definition des limes superior eine Teilfolge  $(n_k)_{k \geq 1}$ , so dass  $r^{-1} < |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}$  für alle  $k \geq 1$ , d.h.  $|a_{n_k}| r^{n_k} > 1$  für alle  $k \geq 1$ . Folglich ist  $|a_n| r^n$  keine Nullfolge und damit  $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$  divergent, also muss  $r > \rho$  gelten. Da dies für alle  $r > L$  gilt, muss auch  $L \geq \rho$  gelten und damit  $\rho = L$ .

Daraus folgt weiterhin, dass die formal (gliedweise) abgeleitete Potenzreihe

$$p'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

denselben Konvergenzradius wie  $p$  hat, denn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n-1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\log(n)}{n-1}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\log(2(n-1))}{n-1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\log(n-1) + \log(2)}{n-1}} = 1$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

und damit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |n a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ .

**Proposition 3.8 (Potenzreihen als holomorphe Funktionen).** Sei  $\rho$  der Konvergenzradius der Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , und  $U = B_\rho(0) \subseteq \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  auf  $U$  holomorph mit komplexer Ableitung  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ .

*Beweis.* Sei  $z \in B_\rho(0)$ . Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{1}{h} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Den Ausdruck in der Klammer schätzen wir ab durch

$$\begin{aligned} \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| &= \left| \left( \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} \right) - n z^{n-1} \right| \leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^{k-1} |z|^{n-k} \\ &\leq \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} |h|^{k-1} |z|^{n-k} = |h| n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} |h|^{k-2} |z|^{n-k} \\ &= |h| n(n-1) (|h| + |z|)^{n-2}. \end{aligned}$$

Sei nun  $|h|$  klein genug, so dass  $r := |z| + |h| < \rho$  (beachte, dass  $B_\rho(0)$  offen ist). Dann gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^n \right) \right| \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|h| + |z|)^{n-2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

da  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$  ebenfalls den Konvergenzradius  $\rho$  hat (das folgt ganz analog wie in Bemerkung 3.7).  $\square$

**Korollar 3.9 (Exponential-, Sinus- und Cosinus-Funktion).** Die Funktionen

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

sind ganze Funktionen mit komplexen Ableitungen

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z).$$

*Beweis.* Nach der Stirling-Formel  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  gilt für alle drei Potenzreihen, dass  $\rho^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{-\frac{1}{2n}} \frac{e}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} = 0$ , d.h.  $\rho = \infty$ . Nach Proposition 3.8 sind damit alle drei Funktionen holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  mit  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ . Gliedweises Differenzieren der Potenzreihen ergibt dann die behaupteten Ableitungen.  $\square$

**Bemerkung 3.10.** Da die Exponentialreihe nach dem vorhergehenden Beweis absolut konvergent auf ganz  $\mathbb{C}$  ist, kann man sie beliebig umordnen. Sortieren nach geraden und ungeraden Potenzen von  $z$  ergibt für  $z = it$  wegen  $i^{2n} = (-1)^n$  und  $i^{2n+1} = i(-1)^n$

$$e^{it} = \sum_{n \geq 0} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k \geq 0} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(t) + i \sin(t),$$

womit wir noch einmal die Euler-Formel bestätigt finden.

### 3.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

Auch im Komplexen gibt es Wegintegrale, die wir nun betrachten wollen. Wege werden vor allem in wegweise zusammenhängenden offenen Mengen, also Gebieten, eine Rolle spielen.

**Definition 3.11 (Komplexe Kurvenintegrale, Gebiet).**

1. Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $U \subseteq \mathbb{C}$ ,  $\gamma \in \mathcal{C}^0(I, U)$  eine (stückweise)  $\mathcal{C}^1$ -Kurve und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, dann ist (vgl. Definitionen 2.10 2. und 2.13)

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_I f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

wobei die rechte Seite definiert ist durch

$$\int_I f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt := \int_I \Re(f(\gamma(t))) \gamma'(t) dt + i \int_I \Im(f(\gamma(t))) \gamma'(t) dt$$

(analog für  $\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ ). Oft werden wir über Kreislinien integrieren und setzen hierfür  $\gamma_r(z) := \{z + re^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$  (Kreislinie um  $z$  mit Radius  $r$ ).

2. Wie im  $\mathbb{R}^2$  heißt eine offene, wegweise zusammenhängende Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  auch Gebiet.

**Bemerkung 3.12 (Komplexe Kurvenintegrale als Kurvenintegrale zweiter Art).**

Man beachte, dass die Werte komplexer Kurvenintegrale komplexe Zahlen sind. Insbesondere ist das komplexe Kurvenintegral etwas anderes als das in Kurvenintegral aus Definition 2.13. Um dennoch einen Zusammenhang herzustellen, schreiben wir das komplexe Integral mittels  $f = u + iv$  und  $\gamma = \alpha + i\beta$  für eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\gamma$  einmal aus. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_I (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(\alpha'(t) + i\beta'(t)) dt \\ &= \int_I u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t) dt + i \int_I u(\gamma(t))\beta'(t) + v(\gamma(t))\alpha'(t) dt \\ &= \int_I \left\langle \begin{pmatrix} u(\gamma(t)) \\ -v(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt + i \int_I \left\langle \begin{pmatrix} v(\gamma(t)) \\ u(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_{\underline{\gamma}} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix} \cdot d(x, y) + i \int_{\underline{\gamma}} \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix} \cdot d(x, y), \end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Integrale Kurvenintegrale zweiter Art nach Definition 2.13 sind.

**Beispiel 3.13 (Kurvenintegrale von Polynomen).** Sei  $r > 0$  und  $\gamma_r(0) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma_r(0)(t) = re^{it}$  wie in Definition 3.11. Dann gilt

$$\int_{\gamma_r(0)} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Das sieht man wie folgt: Wegen  $\gamma_r(0)'(t) = ire^{it}$  folgt aus Definition 3.11 1.

$$\int_{\gamma_r(0)} z^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Für  $n = -1$  folgt daraus direkt die Behauptung. Für  $n \neq -1$  dagegen ist damit

$$\int_{\gamma_r(0)} z^n dz = \frac{ir^{n+1}}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} (1-1) = 0.$$

Insbesondere folgt damit sofort auch für alle Polynome  $f(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$  vom Grad  $k \in \mathbb{N}$ , dass  $\int_{\gamma_r(0)} f(z) dz = 0$ . Der Cauchy'sche Integralsatz 3.16 wird zeigen, dass dies auch für allgemeinere geschlossene Wege und beliebige holomorphe Funktionen gilt.

Wir fassen zunächst einige nützliche Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale, die wir in nachfolgenden Beweisen benötigen werden, kurz zusammen.

**Proposition 3.14 (Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale).** Sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

1. Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = t$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

2. Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale:

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  eine (stückweise)  $\mathcal{C}^1$ -Kurve und  $f$  eine auf  $\gamma(I)$  stetige, komplexwertige Funktion, dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq |f|_{\gamma} L(\gamma), \quad \text{wobei } |f|_{\gamma} := \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \text{ und } L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

( $L(\gamma)$  ist die Bogenlänge von  $\gamma$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ , vgl. Beispiel 2.16).

3. Ist  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  eine (stückweise)  $\mathcal{C}^1$ -Kurve und  $(f_n)_{n \geq 0}$  eine Folge komplexwertiger, auf  $\gamma(I)$  stetiger Funktionen, so dass die Partialsummen  $\sum_{n=0}^m f_n$  auf  $\gamma(I)$  gleichmäßig gegen  $f := \sum_{n \geq 0} f_n$  konvergieren, dann gilt

$$\sum_{n \geq 0} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{n \geq 0} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

*Beweis.* Der Beweis ist eine Übungsaufgabe (vgl. Übungsblatt 11, Aufgabe 2). □

**Bemerkung 3.15 (Zusammensetzung von Kurven, Summenwege).** Zwei stetige Kurven  $\gamma_1 \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$  und  $\gamma_2 \in \mathcal{C}^0([c, d], \mathbb{C})$  mit  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$  kann man ähnlich wie im Beweis von Satz 2.19 zu einer stetigen Kurve oder *Summenweg*  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ , definiert durch

$$\gamma : \begin{cases} [a, b + d - c] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t + c - b), & b \leq t \leq b + d - c. \end{cases} \end{cases},$$

zusammenfügen. Dies lässt sich natürlich induktiv auf endlich viele Kurven, bei denen jeweils der Endpunkt der vorhergehenden Kurve der Startpunkt der nachfolgenden ist, ausdehnen. Stückweise  $\mathcal{C}^k$ -Kurven sind in diesem Sinne gerade die Summe ihrer  $\mathcal{C}^k$ -Abschnitte.

Mit  $-\gamma_2$  bezeichnet man die rückwärts durchlaufene Kurve  $\gamma_2$ , d.h. die orientierungsumkehrende Umparametrisierung  $-\gamma_2 = \gamma_2 \circ \varphi$  mit  $\varphi : [c, d] \rightarrow [c, d]$ ,  $\varphi(t) = d + c - t$ . Ist  $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1([c, d], \mathbb{C})$ , so folgt aus Definition 3.11 und der Substitutionsregel (Satz 2.1) analog zum Beweis von Lemma 2.15, dass  $\int_{-\gamma_2} f(z) dz = -\int_{\gamma_2} f(z) dz$ . Für einen stückweisen  $\mathcal{C}^1$ -Summenweg  $\gamma = \gamma_1 \pm \gamma_2 \pm \dots \pm \gamma_n$  ist damit entsprechend Definition 3.11  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz \pm \int_{\gamma_2} f(z) dz \pm \dots \pm \int_{\gamma_n} f(z) dz$ .

Die Schwierigkeit im Beweis des nun folgenden Cauchy'schen Integralsatzes besteht darin, dass eine holomorphe Funktion  $f$  gemäß Definition 3.1 nur (komplex) differenzierbar ist, aber nicht notwendigerweise stetig differenzierbar. Wir werden später – mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes – sehen, dass jede auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  holomorphe Funktion sogar  $\mathcal{C}^\infty$  auf  $U$  ist. Ferner wird Satz 3.26 zeigen, dass die Gültigkeit des Cauchy'schen Integralsatzes die Existenz einer Stammfunktion auf dem zugrundeliegenden Gebiet impliziert.

**Satz 3.16 (Cauchy'scher Integralsatz).** *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen sowie  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Weiter sei  $\gamma : I \rightarrow U$  eine geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, die eine abgeschlossene Menge  $V \subset U$  berandet. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Bemerkung 3.17 (Vereinfachter Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes unter zusätzlichen Voraussetzungen).** Nimmt man ergänzend an, dass  $U$  ein sternförmiges Gebiet (vgl. Proposition 2.21) und die Funktion  $f$  stetig differenzierbar auf  $U$  ist (was beispielsweise nach Bemerkung 3.7 und Proposition 3.8 für Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises  $B_\rho(0) =: U$  zutrifft), kann man den Cauchy'schen Integralsatz recht einfach beweisen. Wir zeigen, dass unter dieser Annahme sowohl Real- als auch Imaginärteil des Integrals verschwinden. Für den Realteil gilt nach Bemerkung 3.12

$$\Re \left( \int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix} \cdot d(x, y).$$

Da das Vektorfeld  $(x, y) \mapsto (u(x, y), -v(x, y))$  nach der zweiten Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichung  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  rotationsfrei ist (nach Definition 2.46 ist  $\text{rot}(u, -v) = -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ), verschwindet der Realteil wegen der stetigen Differenzierbarkeit von  $u$  und  $v$  und der Sternförmigkeit von  $U$  nach Proposition 2.21 und Satz 2.19. Für den Imaginärteil ist

$$\Im \left( \int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix} \cdot d(x, y).$$

Das Vektorfeld  $(x, y) \mapsto (v(x, y), u(x, y))$  ist nach der ersten Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichung  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  ebenfalls rotationsfrei ( $\text{rot}(v, u) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$ ) und stetig differenzierbar, so dass auch der Imaginärteil nach Proposition 2.21 und Satz 2.19 verschwindet.

*Beweis von Satz 3.16.* Wir setzen nun die stetige Differenzierbarkeit nicht mehr voraus. Falls  $f$  eine Stammfunktion  $F$  hat, d.h. es gilt  $F' = f$ , so folgt die Aussage direkt aus der Definition des komplexen Kurvenintegrals und der Geschlossenheit von  $\gamma$ , denn mit  $I = [a, b]$  ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \frac{dF}{dt}(\gamma(t)) dt = \sum_{i=1}^n (F(\gamma(\tau_i)) - F(\gamma(\tau_{i-1}))) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung  $\gamma(b) = \gamma(a)$ . Wegen der komplexen Differenzierbarkeit von  $f$  gilt für jedes  $z_0 \in U$  die Darstellung  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi(z)$  mit  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = 0$  (vgl. den Beweis von Satz 3.3). Damit ist  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \varphi(z) dz$ , da der konstante Term  $f(z_0)$  und der lineare Term  $f'(z_0)(z - z_0)$  als Funktionen von  $z$  offensichtlich Stammfunktionen besitzen.

Wir zeigen nun die Behauptung zunächst für den Fall, dass  $\gamma$  die Randkurve eines ganz in  $U$  gelegenen Rechtecks  $R_0$  ist. Dieses Rechteck unterteilen wir durch Halbierung der Seiten in vier gleich große Teilrechtecke mit Randkurven  $\gamma_1$  bis  $\gamma_4$ , dann gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_4} f(z) dz$ , da sich die Integralanteile über die im Inneren von  $R_0$  gelegenen Kanten der Teilrechtecke aufheben, siehe Abbildung 3.1 links. Sei  $R_1$  nun dasjenige der vier kleineren Rechtecke, für das das Wegintegral über dessen Rand den betragsmäßig größten Wert annimmt, und  $\tilde{\gamma}_1$  die zugehörige Randkurve, dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz \right|.$$

Setzen wir das Verfahren mit  $R_1$  fort, erhalten wir induktiv eine absteigende Folge von Rechtecken  $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots$  mit Randkurven  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \dots$  (s. Abbildung 3.1 rechts), und es gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\tilde{\gamma}_n} f(z) dz \right|.$$

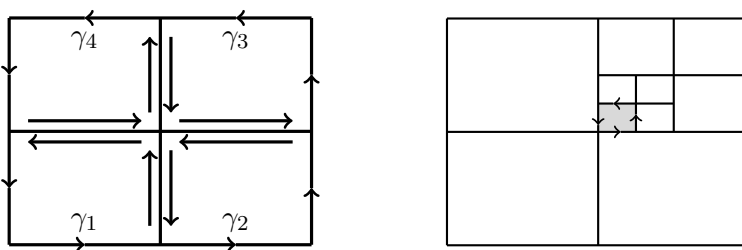


Abbildung 3.1

Unterteilung des Ausgangsrechtecks  $R_0$ .

Die Mittelpunkte der Rechtecke bilden eine Cauchyfolge, deren Grenzwert  $\tilde{z}_0$  in jedem der Rechtecke  $R_n$  enthalten ist. Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig, aber fest. Da  $f$  bei  $\tilde{z}_0$  differenzierbar ist, können wir ein  $\delta > 0$  wählen, so dass  $|\varphi(z)| < \varepsilon \cdot |z - \tilde{z}_0|$  für alle  $z \in U$  mit  $|z - \tilde{z}_0| < \delta$ . Ist  $U_0$  der Umfang des Ausgangsrechtecks  $R_0$  und  $D_0$  sein Durchmesser, so sind Umfang und Durchmesser von  $R_n$  nach Konstruktion  $U_n = 2^{-n}U_0$  und  $D_n = 2^{-n}D_0$ . Wählen wir nun  $n$  so groß, dass  $2^{-n}D_0 < \delta$ , dann ist  $|\varphi|$  überall längs des Randes  $\tilde{\gamma}_n$  kleiner als  $\varepsilon 2^{-n}D_0$ , und da  $\tilde{\gamma}_n$  die Länge  $2^{-n}U_0$  hat, folgt mit der Standardabschätzung aus Proposition 3.14.2.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\tilde{\gamma}_n} f(z) dz \right| = 4 \left| \int_{\tilde{\gamma}_n} \varphi(z) dz \right| \leq 4^n \int_{\tilde{\gamma}_n} |\varphi(z)| dz \leq 4^n \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-n} \cdot \varepsilon D_0 U_0 \\ &= \varepsilon D_0 U_0. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

Ist nun allgemeiner  $R_0$  ein Rechteck wie oben mit Randkurve  $\gamma$  und  $g : R_0 \rightarrow U$  (aufgefasst als Abbildung  $\underline{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) eine  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung, dann gilt  $\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = 0$ , wie wir nachfolgend zeigen werden. Da sich jede geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve aus einer oder mehreren Bildkurven  $g \circ \gamma$  von Rechteckrändern zusammensetzen lässt, folgt daraus die Behauptung. Wie zuvor konstruieren wir induktiv eine absteigende Rechteckfolge  $R_1 \supset R_2 \supset \dots$ , so dass

$$\left| \int_{g \circ \gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{g \circ \tilde{\gamma}_n} f(z) dz \right|.$$

Da  $R_0$  kompakt und  $\underline{g} \cong g$  nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist, ist die Norm der zugehörigen Jacobi-Matrix beschränkt, d.h. es gibt ein  $C > 0$ , so dass  $\|\underline{Dg}(x, y)\| \leq C$  für alle  $(x, y) \in R_0$ . Dann ist der Durchmesser  $\tilde{D}_n$  von  $g(R_n)$  nicht größer als  $C \cdot 2^{-n}D_0$  und die Länge  $\tilde{U}_n$  von  $g \circ \tilde{\gamma}_n$  nicht größer als  $C \cdot 2^{-n}U_0$ . Sei erneut  $\varepsilon > 0$  und  $\tilde{z}_1 = g(\tilde{z}_0)$  das Bild des Grenzpunktes der Rechteckfolge unter  $g$ . Wähle  $\delta > 0$  wie oben und  $n$  so groß, dass  $C \cdot 2^{-n}D_0 < \delta$ , dann folgt genau wie oben

$$\left| \int_{g \circ \gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{g \circ \tilde{\gamma}_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-n} \cdot C^2 \varepsilon D_0 U_0$$

und damit  $\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = 0$ . □

**Bemerkung 3.18 (Spezialfälle des Cauchy'schen Integralsatzes für Rechteckbilder).** Wir haben den Integralsatz explizit für Kurven bewiesen, die sich als  $\mathcal{C}^1$ -Abbildungen von Rechteckrändern darstellen lassen. Hierfür wollen wir einige konkrete Beispiele angeben; dabei seien  $f$  und  $U$  wie in Satz 3.16.

Sind  $\alpha, \beta : [t_0, t_1] \rightarrow U$  zwei  $\mathcal{C}^1$ -Kurven, und liegt für alle  $t \in [t_0, t_1]$  die Verbindungsstrecke von  $\alpha(t)$  nach  $\beta(t)$  ganz in  $U$ , so gilt für den Summenweg  $\tilde{\gamma} = \alpha + h_1 - \beta - h_0$  (vgl. Bemerkung 3.15)

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz + \int_{h_1} f(z) dz - \int_{\beta} f(z) dz - \int_{h_0} f(z) dz = 0,$$

wobei  $h_i : [0, 1] \rightarrow U$  für  $i = 1, 2$  die Verbindungswege  $h_i(s) := (1-s)\alpha(t_i) + s\beta(t_i)$  zwischen  $\alpha(t_0)$  und  $\beta(t_0)$  bzw. zwischen  $\alpha(t_1)$  und  $\beta(t_1)$  sind, denn  $g : [t_0, t_1] \times [0, 1] \rightarrow U$ ,  $g(t, s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$  definiert die geforderte  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung mit  $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma$ , wobei  $\gamma$  die Randkurve von  $[t_0, t_1] \times [0, 1]$  ist.

Liegt zum Beispiel eine abgeschlossene Dreiecksfläche mit Randkurve  $\tilde{\gamma}$  ganz in  $U$ , und durchlaufen wir zwei der Seiten als  $\alpha$  und  $-\beta$ , so gilt ebenfalls  $\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0$ , denn in diesem Fall ist  $\tilde{\gamma} = \alpha + h_1 - \beta$  und  $h_0 \equiv \alpha(t_0) = \beta(t_0)$ , also  $\int_{h_0} f(z) dz = 0$ , siehe Abbildung 3.2 links.

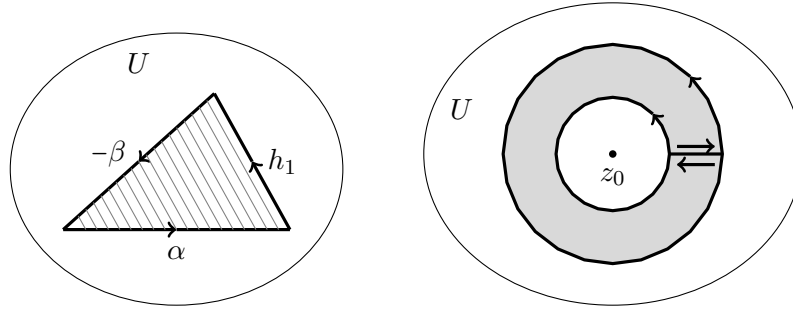


Abbildung 3.2

Zwei Integrationswege aus Bemerkung 3.18, die als Rechteckbilder dargestellt werden können.

Bilden die beiden Kurven  $\alpha$  und  $\beta$  einen geschlossenen Weg  $\tilde{\gamma}$  in  $U$ , d.h. gilt  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ ,  $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$  und  $\tilde{\gamma} = \alpha - \beta$ , so ist  $h_0 \equiv \alpha(t_0) = \beta(t_0)$  sowie  $h_1 \equiv \alpha(t_1) = \beta(t_1)$ , so dass  $\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0$  äquivalent ist zu  $\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz$ .

Sind speziell  $\alpha = \gamma_R(z_0)$  und  $\beta = \gamma_r(z_0)$  zwei Kreislinien um  $z_0$  mit Radien  $R > r \geq 0$ , so ist  $h_0 = h_1$  die Verbindungsstrecke zwischen  $z_0 + r$  und  $z_0 + R$ , die einmal in positiver und einmal in negativer Richtung durchlaufen wird, so dass sich die zugehörigen Integrale wegheben ( $\int_{h_0} f(z) dz - \int_{h_1} f(z) dz = 0$ , siehe Abbildung 3.2 rechts). Damit erhalten wir als Spezialfall des Cauchy'schen Integralsatzes die folgenden Aussagen:

Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, und liegt der Kreisring  $\{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z - z_0| \leq R\}$  um  $z_0$  ganz in  $U$ , dann gilt

$$\int_{\gamma_R(z_0)} f(z) dz = \int_{\gamma_r(z_0)} f(z) dz.$$

Für  $r = 0$  wird daraus:

Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, und liegt die Kreisscheibe  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$  ganz in  $U$ , dann gilt

$$\int_{\gamma_R(z_0)} f(z) dz = 0.$$

**Beispiel 3.19.** Mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes zeigen wir, dass das reelle Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

ist. Für  $U$  können wir hier die senkrecht geschlitzte Ebene  $\tilde{\mathbb{C}}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \mid \Im(z) \leq 0, \Re(z) = 0\}$  ohne die negative imaginäre Achse wählen (diese ist sogar ein sternförmiges Gebiet; jeder Punkt auf der positiven imaginären Achse kann Zentrum sein, z.B.  $z_0 = i$ ). Darauf betrachten wir den Summenweg  $\gamma$ , der aus  $\gamma_1(I_1) = [-R, -\varepsilon]$ ,  $\gamma_2(I_2) = \{\varepsilon e^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$ ,  $\gamma_3(I_3) = [\varepsilon, R]$  und  $\gamma_4(I_4) = \{R e^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$  zusammengesetzt ist; siehe Abbildung 3.3. (Dieser Weg ist genau vom Typ  $\alpha + h_1 - \beta - h_0$  aus Bemerkung 3.18, wenn man zum Beispiel  $\alpha = \gamma_4$ ,  $\beta = -\gamma_2$ ,  $h_0 = -\gamma_3$  und  $h_1 = \gamma_1$  annimmt.)

Da  $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$  holomorph auf  $\tilde{\mathbb{C}}^-$  ist und nach der Euler-Formel  $\Im\left(\frac{e^{ix}}{x}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$  gilt, folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz

$$\begin{aligned} 2 \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx &= \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \Im \left( \int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = \Im \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz \right] \right) \\ &\stackrel{3.16}{=} -\Im \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz \right). \end{aligned}$$



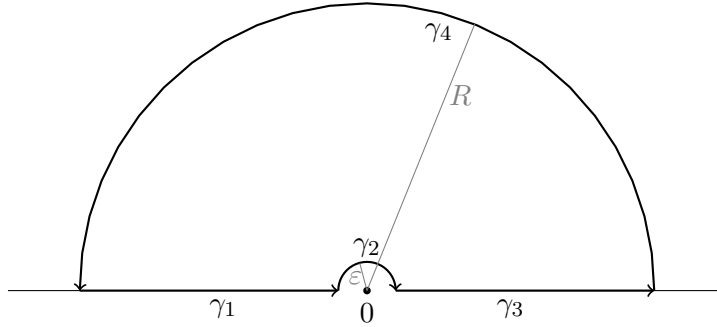


Abbildung 3.3

Für das Integral in Beispiel 3.19 durchlaufen wir den geschlossenen Weg, der aus  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  besteht.

Wegen  $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$  für  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ist  $\sin(x)$  konkav auf  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , daher gilt dort  $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{iR \cos(t) - R \sin(t)}}{Re^{it}} iRe^{it} \right| dt = \int_0^\pi e^{-R \sin(t)} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin(t)} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Rt}{\pi}} dt = -\frac{\pi}{R} e^{-\frac{2Rt}{\pi}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Nach Korollar 3.9 ist  $f(z) := \frac{e^{iz}-1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-1}$  und daher nach Proposition 3.8  $f(z) = F'(z)$  mit  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n \cdot n!} z^n$ , so dass

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \int_\pi^0 \frac{1}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt + F(\varepsilon) - F(-\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -i\pi$$

(der Wert des zweiten Integrals folgt aus den Beweisen der Sätze 3.16 und 2.19). Somit gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = -\frac{1}{2} \Im \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = -\frac{1}{2} \Im \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = \frac{\pi}{2}.$$

**Beispiel 3.20 (Fresnel-Integral).** Wir wollen nun beweisen, dass gilt

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Wir schreiben dazu zunächst

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \Re \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{iz^2} dz \right)$$

und stellen fest, dass es viel einfacher wäre, das Integral nicht entlang des Weges  $\gamma_1(t) = t$ ,  $t \in [0, R]$ , zu berechnen, sondern entlang  $\gamma_3(t) = te^{\frac{i\pi}{4}}$ ,  $t \in [0, R]$ , da  $e^{i\beta(t)^2} = e^{it^2} e^{i\pi/2} = e^{-t^2}$  und wir dieses Integral (bezüglich  $t$ ) aus dem Gauß'schen Integral aus Beispiel 2.8 3. ableiten können. Ganz analog zum Beweis von Korollar 3.9 folgt, dass auch die Funktion  $z \mapsto e^{iz^2}$  auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist und damit nach dem Cauchy'schen Integralsatz die Wegintegrale über geschlossene Wege 0 ergeben. Wir wählen deshalb einen Integrationsweg, der aus  $\gamma_1, \gamma_2$  und

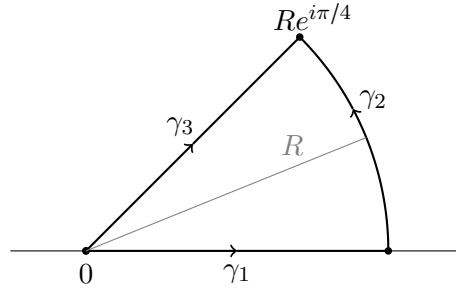


Abbildung 3.4

Für das Integral aus Beispiel 3.20 durchlaufen wir den geschlossenen Summenweg  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ .

$\gamma_3$  besteht, wie sie in Abbildung 3.4 abgebildet sind. (Dieser ist vom Dreieckstyp  $\alpha + h_1 - \beta$  aus Bemerkung 3.18, sofern man statt geradliniger auch kreisbogenförmige Verbindungen zwischen  $\alpha(t)$  und  $\beta(t)$  zulässt, und dann  $\alpha = \gamma_1$ ,  $h_1 = \gamma_2$  und  $\beta = \gamma_3$  wählt.)

Da für  $z = Re^{it}$  gilt  $z^2 = R^2 e^{i2t}$  und  $\sin(2x) \geq \frac{4x}{\pi} \geq x$  für  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  (vgl. Beispiel 3.19), folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} Rie^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2 \sin(2t)} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2 t} dt = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R^2 \pi}{4}}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Damit gilt erneut nach dem Cauchy'schen Integralsatz und wegen  $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{iz^2} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} e^{iz^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( - \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{it^2} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-t^2} dt \stackrel{2.8.3.}{=} \sqrt{\frac{\pi}{8}} (1+i). \end{aligned}$$

Nimmt man auf beiden Seiten den Realteil, so folgt das Ergebnis.

### 3.3 Stammfunktionen

Aus der reellen, eindimensionalen Analysis sind wir gewohnt, dass stetige Funktionen Stammfunktionen besitzen. Aus der mehrdimensionalen Analysis wissen wir, dass nur Gradientenfelder Potentiale, also Stammfunktionen, besitzen. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Umständen holomorphe Funktionen Stammfunktionen besitzen.

Als Motivation erinnern wir uns an die Definition des Hauptzweiges des komplexen Logarithmus (also der Umkehrfunktion der komplexen Exponentialfunktion  $e^z$ ). Im Reellen ist  $\log(x)$  nicht nur diese Umkehrfunktion, sondern tritt auch als Stammfunktion von  $x \mapsto \frac{1}{x}$  auf. Um dies im Komplexen zu untersuchen, wollen wir zunächst Kriterien herleiten, unter denen eine holomorphe Funktion (etwa  $z \mapsto \frac{1}{z}$  für  $z \neq 0$ ) eine (holomorphe) Stammfunktion besitzt.

**Satz 3.21 (Stammfunktionen auf sternförmigen Gebieten).** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet mit Zentrum  $z_0$  und  $\gamma_{z_0, z} : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\gamma_{z_0, z}(t) = z_0 + t(z - z_0)$ . Dann ist für jede auf  $U$  holomorphe Funktion  $f$  die Funktion  $F(z) = \int_{\gamma_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta$  eine Stammfunktion von  $f$ , d.h. es gilt  $F' = f$ .*

*Beweis.* Da  $U$  sternförmig ist, ist  $\gamma_{z_0,z} \subset U$  für alle  $z \in U$  und damit  $F$  wohldefiniert. Wähle nun  $z \in U$  beliebig, aber fest. Da  $U$  offen ist, ist für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  auch die offene Kreisscheibe  $B_\varepsilon(z) := \{\tilde{z} \in \mathbb{C} \mid |\tilde{z} - z| < \varepsilon\} \subset U$ , so dass für alle  $z_1 \in B_\varepsilon(z)$  auch das abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten  $z_0, z, z_1$  ganz in  $U$  enthalten ist. Insbesondere ist dann auch der Weg  $\gamma_{z,z_1}$  von  $z$  nach  $z_1$  mit  $\gamma_{z,z_1}(t) = z + t(z_1 - z)$ ,  $t \in [0, 1]$ , ganz in  $U$  enthalten, und die Randkurve  $\gamma$  des Dreiecks ist gegeben durch  $\gamma = \gamma_{z_0,z} + \gamma_{z,z_1} - \gamma_{z_0,z_1}$ , siehe Abbildung 3.5 unten. Da  $f$  holomorph auf  $U$  ist, folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz und Bemerkung 3.18, dass

$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_{z,z_1}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{z_0,z_1}} f(\zeta) d\zeta = F(z) + \int_{\gamma_{z,z_1}} f(\zeta) d\zeta - F(z_1).$$

Setzt man nun

$$F_1(z_1) := \frac{1}{z_1 - z} \int_{\gamma_{z,z_1}} f(\zeta) d\zeta \quad \text{für } z_1 \in B_\varepsilon(z) \setminus \{z\} \quad \text{und} \quad F_1(z) = f(z),$$

so folgt aus der vorhergehenden Gleichung  $F(z_1) = F(z) + (z_1 - z)F_1(z_1)$  für alle  $z_1 \in B_\varepsilon(z)$ . Wenn wir nun noch zeigen können, dass  $F_1(z_1)$  stetig in  $z$  ist, folgt

$$f(z) = F_1(z) = \lim_{z_1 \rightarrow z} F_1(z_1) = \lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} = F'(z),$$

und der Satz ist bewiesen. Wegen

$$\int_{\gamma_{z,z_1}} d\zeta = \int_0^1 \gamma'_{z,z_1}(t) dt = \int_0^1 (z_1 - z) dt = z_1 - z$$

gilt für  $z_1 \in B_\varepsilon(z) \setminus \{z\}$

$$F_1(z_1) - F_1(z) = F_1(z_1) - f(z) = \frac{1}{z_1 - z} \int_{\gamma_{z,z_1}} f(\zeta) - f(z) d\zeta.$$

Da  $\gamma_{z,z_1}$  offensichtlich die Länge  $|z_1 - z|$  hat, folgt mit der Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale aus Proposition 3.14 2., dass

$$|F_1(z_1) - F_1(z)| \leq \frac{1}{|z_1 - z|} |f - f(z)|_{\gamma_{z,z_1}} |z_1 - z| \leq \sup_{\zeta \in B_\varepsilon(z)} |f(\zeta) - f(z)|$$

für alle  $z_1 \in B_\varepsilon(z)$ . Da  $f$  nach Voraussetzung holomorph ist, ist  $f$  auch stetig (das ergibt sich wie im Reellen unmittelbar aus der Definition der komplexen Differenzierbarkeit), und damit folgt aus der letzten Ungleichung für  $\varepsilon \rightarrow 0$  auch die Stetigkeit von  $F_1$  in  $z$ .  $\square$

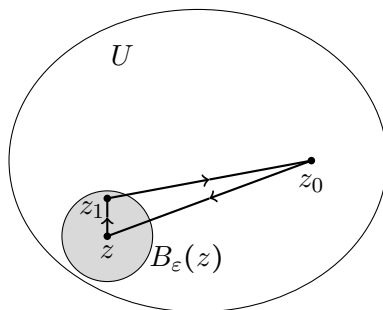


Abbildung 3.5

Veranschaulichung der Integrationswege im Beweis von Satz 3.21

**Beispiel 3.22 (Hauptzweig des Logarithmus).** Betrachten wir nochmal die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Wir zeigen, dass  $f$  in  $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  zwar keine Stammfunktion besitzt, jedoch in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \Re(z) \leq 0, \Im(z) = 0\}$ . In Beispiel 3.13 haben wir gesehen, dass

$$\int_{\gamma_r(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0.$$

Hätte  $f$  eine Stammfunktion  $F$  auf  $\mathbb{C}^\times$ , so müsste diese holomorph auf  $\mathbb{C}^\times$  sein (denn es ist dann ja  $F' = f$ ). Da aber  $\gamma = \gamma_r(0)$  eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{C}^\times$  ist, müsste gelten

$$\int_{\gamma_r(0)} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = F(\gamma(t)) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0,$$

womit wir einen Widerspruch erhalten. Somit kann  $f$  auf  $\mathbb{C}^\times$  keine Stammfunktion besitzen. Da aber  $f$  holomorph auf  $\mathbb{C}^-$  und  $\mathbb{C}^-$  sternförmig ist (siehe auch Beispiel 3.19), existiert nach Satz 3.21 eine Stammfunktion  $F(z)$  von  $f$ , die man als Wegintegral von  $f$  entlang des geradlinigen Weges von Zentrum  $z_0$  nach  $z$  erhält.

Wir wählen  $z_0 = 1$  als Zentrum von  $\mathbb{C}^-$ . Anstatt  $f$  entlang des geradlinigen Weges  $\gamma_{1,z}$  zu integrieren, können wir nach dem Cauchy'schen Integralsatz 3.16 als Integrationsweg auch denjenigen Weg  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  wählen, der sich aus  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zusammensetzt, wobei  $\gamma_1(t) = 1 + t(r-1)$ ,  $t \in [0, 1]$ , von 1 nach  $r := |z|$  geht und  $\gamma_2(t) = re^{it\varphi}$ ,  $t \in [0, 1]$ , der Kreisbogen von  $r$  nach  $z = re^{i\varphi}$  mit  $\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi)$  ist; siehe Abbildung 3.6. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(z) &:= \int_{\gamma_{1,z}} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_0^1 \frac{r-1}{1+t(r-1)} dt + \int_0^1 \frac{ri\varphi e^{it\varphi}}{re^{it\varphi}} dt \\ &= \log(1+t(r-1)) \Big|_{t=0}^{t=1} + i\varphi = \log(r) + i\varphi = \log(|z|) + i \arg(z). \end{aligned}$$

Diese Funktion hatten wir zu Beginn des Kapitels als Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.

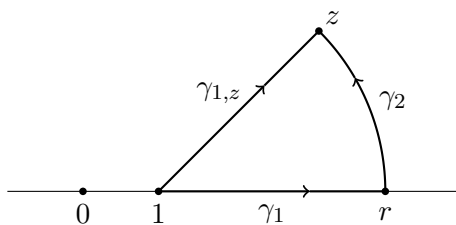


Abbildung 3.6

Integrationswege zur Berechnung der Stammfunktion von  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{C}^-$  aus Beispiel 3.22.

**Definition 3.23 (Elementargebiet, 0-homotop).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet.

1.  $U$  heißt Elementargebiet, falls jede auf  $U$  holomorphe Funktion eine Stammfunktion auf  $U$  besitzt.
2. Ein geschlossener Weg  $\gamma$  in  $U$  heißt 0-homotop, wenn es ein  $z_0 \in U$  und eine stetige Funktion  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  gibt mit

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= H(s, 1), & s &\in [0, 1], \\ H(1, t) &= \gamma(t), & t &\in [0, 1], \\ H(0, t) &\equiv z_0, & t &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

3.  $U$  heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in  $U$  0-homotop ist.

**Bemerkung 3.24.**

1. Man nennt 0-homotope Wege auch *zusammenziehbar*, da man sie mittels der Abbildung  $H$  stetig auf einen Punkt  $z_0 \in U$  überführen kann.
2. Anschaulich gesprochen ist  $U$  einfach zusammenhängend, wenn es keine „Löcher“ hat, denn wenn Löcher in  $U$  existieren, kann man geschlossene Kurven, die diese Löcher umkreisen, nicht zusammenziehen. Beispielsweise kann man in der punktierten Ebene  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  keine Kreislinie  $\gamma_r(0)$  auf einen Punkt  $z_0 \neq 0$  innerhalb des Kreises zusammenziehen, da die stetigen Bilder der Kreislinie unter  $H$  irgendwann den Ursprung überqueren müssen.
3. Allgemeiner nennt man zwei stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in  $U$ , die denselben Anfangspunkt  $z_0$  und denselben Endpunkt  $z_1$  besitzen, *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ ,  $(s, t) \mapsto H(s, t)$ , gibt mit der Eigenschaft, dass für die Wege  $H(s, \cdot) =: h_s : [0, 1] \rightarrow U$  gilt: Alle Kurven  $h_s$  haben den Anfangspunkt  $z_0$  und den Endpunkt  $z_1$ , und  $h_0 = \gamma_1$ ,  $h_1 = \gamma_2$ . Ist  $\gamma$  0-homotop, so ist  $\gamma = \gamma_1$  homotop zu dem konstanten „Weg“  $\gamma_2 \equiv z_0$ .

Die folgende Proposition ist streng genommen nur eine Umformulierung des Cauchy'schen Integralsatzes und für stetig differenzierbare Homotopien ein Spezialfall von Bemerkung 3.18.

**Proposition 3.25 (Eine Homotopieformel).** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f$  holomorph auf  $U$  sowie  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$  homotope, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurven, dann gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

*Beweis.* Da  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  als homotope Kurven gleiche Anfangs- und Endpunkte haben, ist der Weg  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  eine geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, die die (als stetiges Bild einer kompakten Menge) abgeschlossene Menge  $H([0, 1] \times [0, 1]) \subset U$  berandet, so dass sich die Behauptung unmittelbar aus dem Cauchy'schen Integralsatz 3.16 ergibt. (Ist  $H$  stetig differenzierbar, so ist  $\gamma$  als  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung  $g = H$  des Randes des Rechtecks  $[0, 1] \times [0, 1]$  darstellbar.)  $\square$

Wir wissen bereits aus Theorem 3.21, dass sternförmige Gebiete Elementargebiete sind, auf denen holomorphe Funktionen Stammfunktionen besitzen. Ferner gilt auf sternförmigen Gebieten natürlich auch der Cauchy'sche Integralsatz. Das gleichzeitige Auftreten dieser beiden Eigenschaften ist kein Zufall, wie wir nun sehen werden.

**Satz 3.26 (Eine Charakterisierung von Elementargebieten).** *Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann sind äquivalent:*

1.  $U$  ist ein Elementargebiet.
2. Es gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \tag{*}$$

für jede geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve in  $U$  und jede holomorphe Funktion  $f$ .

*Etwas genauer besitzt eine auf  $U$  holomorphe Funktion  $f$  genau dann eine Stammfunktion, wenn (\*) für jede geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\gamma$  in  $U$  gilt.*

*Beweis.* 1.  $\Rightarrow$  2.: Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  eine geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve in  $U$ , dann gilt, wie bereits früher schon gesehen,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \frac{dF}{dt}(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

2.  $\Rightarrow$  1.: Der Beweis ist vollkommen analog zu dem von Satz 2.19: Da  $U$  wegweise zusammenhängend ist, wählen wir  $z_0 \in U$  beliebig und setzen

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei  $\gamma_z$  eine beliebige (stückweise)  $\mathcal{C}^1$ -Kurve von  $z_0$  nach  $z$  ist. Man beachte, dass die rechte Seite nur von  $z$  abhängt, aber nicht vom konkret gewählten  $\gamma_z$ . Wählen wir zwei Kurven  $\gamma_z, \tilde{\gamma}_z$  von  $z_0$  nach  $z$ , so ist der Summenweg  $\gamma = \gamma_z - \tilde{\gamma}_z$  geschlossen, und nach Voraussetzung gilt somit  $0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta) d\zeta$ , woraus die Unabhängigkeit von  $\gamma_z$  folgt. Für  $z \in U$  sei  $h$  so klein gewählt, dass  $B_{|h|}(z) \subseteq U$  (das ist möglich, da  $U$  als Gebiet offen ist). Sei  $\gamma_{z,z+h}$  wie in Satz 3.21 die geradlinige Verbindung von  $z$  nach  $z+h$ , so gilt für den Summenweg  $\tilde{\gamma} = \gamma_z + \gamma_{z,z+h}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &= \frac{1}{h} \left( \int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_0^1 f(z+ht) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z), \end{aligned}$$

also ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . □

**Bemerkung 3.27.** Der obige Satz und die Homotopieformel gelten allgemeiner auch dann, wenn die Kurven  $\gamma$  nur als stetig, aber nicht notwendigerweise als stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt werden. Wir haben aber das komplexe Kurvenintegral nur für stückweise stetig differenzierbare Kurven definiert und verzichten im Rahmen dieser Vorlesung auf eine (recht mühselige) Verallgemeinerung.

**Proposition 3.28.** *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist ein Elementargebiet.*

*Beweis.* Da  $U$  einfach zusammenhängend ist, ist definitionsgemäß jede geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\gamma$  in  $U$  0-homotop, d.h.  $\gamma$  ist homotop zu einem konstanten Weg  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ ,  $\tilde{\gamma}(t) \equiv z_0$ , mit  $z_0 \in U$ . Nach Proposition 3.25 gilt dann wegen  $\tilde{\gamma}'(t) \equiv 0$ , dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_0^1 f(z_0) \tilde{\gamma}'(t) dt = 0.$$

Nach Satz 3.26 ist daher  $U$  ein Elementargebiet. □

**Bemerkung 3.29.** Mit Hilfe des Riemann'schen Abbildungssatzes

*Sei  $U \neq \emptyset, \mathbb{C}$  ein Elementargebiet. Dann gibt es eine bijektive, holomorphe Abbildung  $\varphi : U \rightarrow B_1(0)$  mit holomorpher Umkehrabbildung.*

kann man zeigen, dass in Proposition 3.28 auch die Umkehrung gilt, dass also die Elementargebiete genau die einfach zusammenhängenden Gebiete sind.

Um zu zeigen, dass jedes Elementargebiet einfach zusammenhängend ist, geht man wie folgt vor: Entweder ist  $U = \mathbb{C}$ , dann ist die Aussage klar. Ist  $U \neq \mathbb{C}$ , so existiert eine bijektive, holomorphe Abbildung  $\varphi : U \rightarrow B_1(0)$  mit holomorpher Umkehrabbildung. Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $U$ . Da  $B_1(0)$  offensichtlich einfach zusammenhängend ist, ist  $\varphi \circ \gamma$  ein 0-homotoper Weg in  $B_1(0)$ . Diese Eigenschaft lässt sich mittels der stetigen Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  dann auch auf  $U$  übertragen.

**Bemerkung 3.30 (Zusammenhang und Wegzusammenhang).** Wir haben Gebiete als offene, wegweise zusammenhängende Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{C}$  definiert, von denen die einfach zusammenhängenden Mengen eine Untermenge sind. Neben diesen beiden Zusammenhangsbegriffen gibt es noch einen dritten, der allgemeiner auch für topologische Räume  $(X, \mathcal{O}(X))$  definiert ist, wobei  $\mathcal{O}(X)$  die Topologie auf  $X$  bezeichnet. Diese ist nichts anderes als ein System von per Definition offenen Teilmengen von  $X$ , das drei Bedingungen erfüllen muss: Es muss die leere Menge und den ganzen Raum enthalten ( $\emptyset, X \in \mathcal{O}(X)$ ) sowie endliche Schnitte (für  $O_1, O_2 \in \mathcal{O}(X)$  ist  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(X)$ ) und beliebige Vereinigungen (für  $O_i \in \mathcal{O}(X)$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , ist auch  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} O_i \in \mathcal{O}(X)$ , wobei  $\mathcal{I}$  beliebig, insbesondere auch überabzählbar sein darf). Die abgeschlossenen Mengen in  $X$  sind dann die Komplemente der Mengen aus  $\mathcal{O}(X)$ . Wegen  $X^c = \emptyset$  gilt stets, dass die leere Menge und der ganze Raum sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  von  $X$  wird selbst zu einem topologischen Raum, wenn man sie mit der Relativtopologie  $\mathcal{O}(U) := \{U \cap O \mid O \in \mathcal{O}(X)\}$  versieht, d.h. die in  $U$  offenen Mengen sind genau die Schnitte von  $U$  mit offenen Mengen aus  $X$ ; gleiches gilt analog auch für in  $U$  abgeschlossene Mengen.

Man definiert nun  $U \subseteq X$  als *zusammenhängend*, wenn  $\emptyset, U$  die einzigen Teilmengen von  $U$  sind, die zugleich offen und abgeschlossen (bzgl. der Relativtopologie  $\mathcal{O}(U)$ ) sind. (Es gibt noch weitere äquivalente Definitionen, aber für unsere Zwecke ist diese vorteilhafter.)

Es gilt stets, dass jede wegweise zusammenhängende Menge  $U \subseteq X$  auch zusammenhängend ist (vgl. Übungsblatt 12, Aufgabe 4), die Umkehrung ist jedoch im Allgemeinen falsch. Für offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  oder  $\mathbb{C}$  sind jedoch beide Zusammenhangsbegriffe äquivalent (vgl. Übungsblatt 13, Aufgabe 2), d.h. es gilt: *Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  oder  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen, so ist  $U$  genau dann wegweise zusammenhängend, wenn  $U$  zusammenhängend ist.*

Daher ist unsere Gebietsdefinition äquivalent zu der in der Literatur häufiger gegebenen, dass Gebiete offene, zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{C}$  sind.

### 3.4 Die Cauchy'sche Integralformel und einige Folgerungen

Wir kommen nun zu einem der im Hinblick auf seine Konsequenzen vielleicht wichtigsten Sätze der Funktionentheorie, der Cauchy'schen Integralformel (nicht zu verwechseln mit dem Cauchy'schen Integralsatz 3.16). Sie erlaubt u.a. die Folgerung, dass jede holomorphe Funktion analytisch ist, d.h. in einer Potenzreihe darstellbar, und somit beliebig oft komplex differenzierbar; siehe Theorem 3.35. Wir werden am Schluss mit ihrer Hilfe sogar den Fundamentalsatz der Algebra beweisen können; siehe Korollar 3.45.

**Satz 3.31 (Cauchy'sche Integralformel).** *Sei  $f$  holomorph auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$ , die die abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{B}_r(z_0)$  enthalte, d.h.  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$ . Dann gilt für jedes  $z \in B_r(z_0)$  im Inneren der Kreisscheibe, dass*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

*Beweis.* Sei  $z \in B_r(z_0)$  beliebig, aber fest, und  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < r$  so klein, dass  $\gamma_\varepsilon(z) \subset B_r(z_0)$  gilt. Aus Bemerkung 3.18 folgt, dass

$$\int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

denn der dort betrachtete Spezialfall eines Kreisringes gilt offensichtlich allgemeiner auch dann, wenn die innere Kreislinie mit kleinerem Radius einen anderen Mittelpunkt hat als die äußere. Mit der linken ist offensichtlich auch die rechte Seite der vorherigen Gleichung unabhängig von  $\varepsilon > 0$ . Ferner ist  $f$  nach Voraussetzung holomorph auf  $U$ , so dass für alle  $\zeta \in U$  hinreichend nahe bei  $z$  der Differenzenquotient  $\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$  beschränkt ist. Somit existiert ein  $C < \infty$ , so dass aus der Dreiecksungleichung und der Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale aus Proposition 3.14 2. folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| &= \left| \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| \\ &\leq \left| \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| + |f(z)| \underbrace{\left| \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i \right|}_{=0 \text{ nach Beispiel 3.13}} \\ &\leq 2\pi\varepsilon C \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.32 (Interpretation).** Das Erstaunliche an der Cauchy'schen Integralformel ist, dass der Wert  $f(z)$  der holomorphen Funktion  $f$  in  $z$  durch die Werte von  $f$  auf  $\gamma_r(z_0)$  festgelegt ist (für jedes  $r > 0$  mit  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$ ), solange nur  $z \in B_r(z_0)$ . Im Spezialfall  $z = z_0$  ergibt sich außerdem, dass  $f(z_0)$  genau der Mittelwert der Funktionswerte auf der Kreislinie  $\gamma_r(z_0)$  ist, denn

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Die Cauchy'sche Integralformel erlaubt die Berechnung einiger reeller Integrale. Die zugrunde liegende Theorie ist eigentlich noch viel reichhaltiger, hat aber an dieser Stelle keinen Platz. Der interessierte Leser suche am besten nach dem Stichwort *Residuensatz*, der ein allgemeines Konzept bereitstellt, um den Wert reeller Integrale mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln einfacher (oder überhaupt erst) berechnen zu können. Wir stellen dies an zwei Beispielen vor, die auch ohne die allgemeine Theorie nachvollzogen werden können.

**Beispiel 3.33.** Wir zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

Dieses Integral ist womöglich bereits aus der Analysis bekannt und folgt dort aus der Tatsache, dass  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Hier verwenden wir die Cauchy'sche Integralformel und betrachten das Kurvenintegral über den in Abbildung 3.7 dargestellten Weg  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_5$ . Dann gilt wie in Bemerkung 3.18 für jede in der punktierten oberen Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\} \setminus \{i\}$  holomorphe Funktion  $f$ , dass  $\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz + \int_{\gamma_5} f(z) dz$ . Nun ist

$$\left| \int_{\gamma_5} \frac{1}{1+z^2} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{1}{1+R^2 e^{2it}} Rie^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{|1+R^2 e^{2it}|} dt \leq \pi \frac{R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$



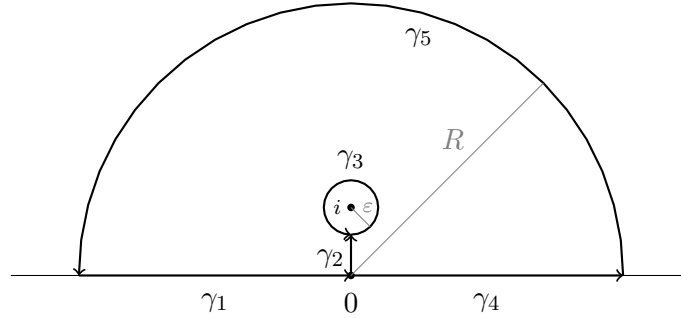


Abbildung 3.7

Für die Integrale aus den Beispielen 3.33 und 3.34 durchlaufen wir den geschlossenen Weg

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 + \gamma_5.$$

denn aus der Dreiecksungleichung folgt  $|z_1| \geq |z_1 - z_2| - |z_2|$  und daher mit  $z_1 = 1 + R^2 e^{2it}$  und  $z_2 = 1$ , dass  $|1 + R^2 e^{2it}| \geq R^2 - 1$ . Daraus erhält man wegen  $\gamma_3 = \gamma_\varepsilon(i)$  (mit  $0 < \varepsilon < 1$ ), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{\gamma_4} \frac{1}{1+z^2} dz \right] = \int_{\gamma_\varepsilon(i)} \frac{1}{1+z^2} dz.$$

Zur Berechnung des Integrals auf der rechten Seite schreiben wir

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

und wenden die Cauchy'sche Integralformel auf die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z+i}$  an, die in der oberen Halbebene holomorph ist. Damit erhalten wir schließlich

$$\int_{\gamma_\varepsilon(i)} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{\gamma_\varepsilon(i)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-i} d\zeta = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

**Beispiel 3.34.** Für das dem obigen Beispiel recht ähnliche Integral ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

Dieses Integral kam vermutlich noch nicht in der Analysis vor, aber das obige Verfahren funktioniert genauso auch hier: Wir schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \Re \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right)$$

und verwenden wieder den Weg aus Abbildung 3.7. Das Integral entlang  $\gamma_5$  schätzen wir erneut ab durch

$$\left| \int_{\gamma_5} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos(t)+i\sin(t))}}{1+R^2 e^{2it}} R i e^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{R e^{-R\sin(t)}}{|1+R^2 e^{2it}|} dt \leq \pi \frac{R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Wir wenden nun die Cauchy'sche Integralformel auf die in der oberen Halbebene holomorphe Funktion  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$  an. Damit erhält man analog zum vorherigen Beispiel

$$\Re \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right) = \Re \left( \int_{\gamma_\varepsilon(i)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-i} d\zeta \right) = \Re(2\pi i f(i)) = \Re \left( 2\pi i \frac{1}{2ei} \right) = \frac{\pi}{e}.$$

Bekanntlich ist eine einmal reell differenzierbare Abbildung nicht notwendigerweise auch zweimal reell differenzierbar (ein Beispiel wäre  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(x)$ ). In der Funktionentheorie ist dies anders: Das nächste Resultat impliziert, dass jede holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. Es wird oft auch als *Hauptsatz der Funktionentheorie* bezeichnet.

**Satz 3.35 (Potenzreihenentwicklungssatz / Hauptsatz der Funktionentheorie).**

Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f$  holomorph auf  $U$ . Dann gibt es genau eine Potenzreihe  $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  mit Konvergenzradius  $\rho \geq \sup\{r \mid B_r(z_0) \subseteq U\} > 0$ , so dass  $f(z) = p(z)$  für  $z \in B_\rho(z_0)$ . Ferner gilt die Cauchy'sche Koeffizientenformel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad 0 < r < \rho.$$

*Beweis.* Zur Eindeutigkeit: Angenommen,  $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  und  $q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$  wären zwei Potenzreihen mit den geforderten Eigenschaften. Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius unendlich oft differenzierbar sind, wäre dann für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{1}{n!} p^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!} q^{(n)}(z_0) = b_n \quad \text{und somit } p \equiv q.$$

Nun zur Existenz, wobei wir der Einfachheit halber o.B.d.A.  $z_0 = 0$  annehmen: Sei  $r > 0$ , so dass  $z \in \overline{B}_r(0) \subset U$ . Dann gilt nach der Cauchy'schen Integralformel (Satz 3.31)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} d\zeta.$$

Der Term  $\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}$  ist wegen  $z \in B_r(0)$  und  $\zeta \in \gamma_r(0)$  und damit  $|\frac{z}{\zeta}| = \frac{|z|}{r} < 1$  aber der Grenzwert der geometrischen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{\zeta})^n$ . Diese konvergiert für festes  $z$  absolut und gleichmäßig in  $\zeta$  auf  $\gamma_r(0)$ , daher konvergiert auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta} (\frac{z}{\zeta})^n$  für festes  $z$  wegen der Stetigkeit von  $f$  gleichmäßig in  $\zeta$  auf  $\gamma_r(0)$ . Daher gilt nach Proposition 3.14 3.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n.$$

Aus der letzten Gleichung folgen alle Behauptungen. □

Wie mächtig der Hauptsatz der Funktionentheorie ist, wird erst klar, wenn wir uns nun einige Folgerungen ansehen und beweisen. Wir bemerken insbesondere, dass alle folgenden Resultate für reellwertige Funktionen, die nur einmal reell differenzierbar sind, nicht gelten.

**Korollar 3.36 (Satz von Goursat).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f$  holomorph auf  $U$ . Dann ist  $f$  in  $U$  beliebig oft komplex differenzierbar (und insbesondere  $C^\infty$ ).

*Beweis.* Für jedes  $z_0 \in U$  ist  $f$  lokal, d.h. innerhalb einer Kreisscheibe  $B_r(z_0)$  mit hinreichend kleinem  $r$ , als Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  darstellbar. Da konvergente Potenzreihen beliebig oft komplex differenzierbar sind, ist somit  $f$  beliebig oft komplex differenzierbar auf ganz  $U$ . □

Nach dem Cauchy'schen Integralsatz (siehe auch Bemerkung 3.18) gilt für jede auf einem Gebiet  $U$  holomorphe Funktion  $f$ , dass das Kurvenintegral von  $f$  über den Rand eines ganz in  $U$  liegenden abgeschlossenen Dreiecks verschwindet. Bemerkenswerterweise gilt auch die Umkehrung, die als Satz von Morera bekannt ist.

**Korollar 3.37 (Satz von Morera).** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, und für die Randkurve  $\gamma$  jedes ganz in  $U$  liegenden abgeschlossenen Dreiecks gelte  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Dann ist  $f$  holomorph auf  $U$ .*

*Beweis.* Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, genügt es, den Fall zu betrachten, dass  $U = B_r(z_0)$  eine Kreisscheibe ist. Da diese sternförmig mit Zentrum  $z_0$  ist, folgt aus dem Beweis von Satz 3.21 (für den nur die Stetigkeit von  $f$  und die Tatsache, dass die Integrale von  $f$  über jede Dreiecksrandkurve in  $U$  verschwinden, benötigt wird, was wir hier voraussetzen), dass  $F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta) d\zeta$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Somit ist  $f$  die Ableitung einer holomorphen Funktion  $F$  und damit nach dem Satz von Goursat auch selbst holomorph.  $\square$

Der Hauptsatz 3.35 beinhaltet bereits einen Identitätssatz: Wenn zwei auf  $U$  holomorphe Funktionen  $f, g$  auf einer kleinen Umgebung  $V(z_0) \subset U$  eines Punktes  $z_0 \in U$  übereinstimmen, stimmen sie auch schon auf der Kreisscheibe  $B_R(z_0)$  mit  $R = \sup\{r \mid B_r(z_0) \subseteq U\}$  überein, denn wegen  $f|_{V(z_0)} \equiv g|_{V(z_0)}$  müssen die Potenzreihenentwicklungen von  $f$  und  $g$  auf  $B_R(z_0)$  dieselben Koeffizienten haben. Nach der Cauchy'schen Integralformel und Bemerkung 3.32 gilt sogar: Ist  $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$  eine abgeschlossene Kreisscheibe in  $U$ , so dass  $f$  und  $g$  auf deren Rand  $\partial\overline{B}_r(z_0) = \gamma_r(z_0)$  übereinstimmen ( $f|_{\gamma_r(z_0)} = g|_{\gamma_r(z_0)}$ ), so folgt bereits  $f \equiv g$  auf  $\overline{B}_r(z_0)$ . Tatsächlich lassen sich diese Aussagen noch verschärfen: Zwei auf einem Gebiet  $U$  holomorphe Funktionen stimmen dort bereits dann vollständig überein, wenn sie dies auf einer innerhalb  $U$  konvergenten Folge tun.

**Satz 3.38 (Identitätssatz).** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f, g$  holomorph auf  $U$  sowie  $(z_n)_{n \geq 1} \subset U$  eine Folge in  $U$  mit  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \in U$ ,  $z_n \neq z_0$  und  $f(z_n) = g(z_n)$  für alle  $n \geq 1$ . Dann gilt  $f|_U \equiv g|_U$ .*

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $g \equiv 0$ , sonst ersetze  $f$  durch  $f - g$ . Es gelte also  $f(z_1) = f(z_2) = \dots = 0$ . Wir müssen zeigen, dass  $f \equiv 0$  auf ganz  $U$ . Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

Zunächst zeigen wir, dass neben  $f(z_0)$  auch alle Ableitungen von  $f$  bei  $z_0$  verschwinden müssen, d.h. es gilt  $f^{(k)}(z_0) = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Wäre das nicht der Fall, gäbe es ein  $m \geq 1$  mit  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ , und wir wählen das kleinste  $m$  mit dieser Eigenschaft. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.35 existieren ein  $r_0 > 0$  sowie  $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in B_{r_0}(z_0).$$

Wegen  $0 = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k$  für  $0 \leq k \leq m - 1$  folgt

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \underbrace{\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m}}_{=: h_m(z)} \quad \text{für alle } z \in B_{r_0}(z_0),$$

und  $h_m(z_0) = a_m \neq 0$ . Da  $h_m$  stetig ist, gilt  $h_m \neq 0$  auch innerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung  $V(z_0) \subseteq B_{r_0}(z_0)$  von  $z_0$ . Dann ist aber wegen der obigen Darstellung  $f(z) \neq 0$  für

alle  $z \in V(z_0)$  mit  $z \neq z_0$ , d.h.  $f$  hätte innerhalb der Umgebung  $V(z_0)$  von  $z_0$  keine weitere Nullstelle. Das widerspricht aber der Voraussetzung, dass  $z_n \rightarrow z_0$  und  $f(z_n) = 0$  für alle  $n \geq 1$ . Für den zweiten Schritt betrachten wir nun die Menge  $S := \{z \in U \mid f^{(k)}(z) = 0 \text{ für alle } k \geq 0\}$  aller Punkte von  $U$ , in denen  $f$  und sämtliche Ableitungen von  $f$  verschwinden. Offensichtlich ist diese Menge nicht leer, da  $z_0 \in S$ . Für jeden Punkt  $\zeta \in S$  muss aber nach dem Potenzreihenentwicklungssatz wegen  $0 = \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!} = \hat{a}_k$  die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k (z - \zeta)^k$  mit Entwicklungspunkt  $\zeta$  auf einer ganzen Kreisscheibe  $B_{r_\zeta}(\zeta)$  (mit passendem  $r_\zeta > 0$ ) verschwinden, d.h. es gilt  $f \equiv 0$  auf  $B_{r_\zeta}(\zeta)$  und damit auch  $B_{r_\zeta}(\zeta) \subseteq S$ . Somit enthält  $S$  für jeden Punkt  $\zeta \in S$  auch eine offene Umgebung desselben und ist daher auch selbst offen.

Nach dem Satz von Goursat sind aber neben  $f$  auch alle Ableitungen  $f^{(k)}$  für  $k \geq 1$  stetig und daher die Mengen  $S_k := \{z \in U \mid f^{(k)}(z) = 0\}$  als Urbilder der abgeschlossenen Menge  $\{0\}$  ebenfalls abgeschlossen für alle  $k \geq 0$  und damit auch  $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ . Insgesamt ist also  $S$  eine nicht-leere, offene und abgeschlossene Teilmenge von  $U$ . Da  $U$  als Gebiet nach Definition 3.11 wegweise zusammenhängend und damit auch zusammenhängend ist (vgl. Bemerkung 3.30), folgt  $S = U$  und damit  $f \equiv 0$  auf ganz  $U$ .  $\square$

**Bemerkung 3.39.** Alternativ kann man die Bedingung im Identitätssatz auch so formulieren, dass die Menge  $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$  einen Häufungspunkt in  $U$  hat, denn dann muss es eine gegen den Häufungspunkt konvergierende Teilfolge geben, die den Voraussetzungen des obigen Satzes genügt. Diese sind insbesondere schon dann erfüllt, wenn  $f$  und  $g$  auf einem beliebig kleinen, stetigen Weg- oder Geradenstück positiver Länge übereinstimmen.

Für stetige Funktionen gilt allgemein, dass die Urbilder offener Mengen offen sind. Die Umkehrung ist dagegen im Allgemeinen falsch. Beispielsweise ist für die reelle Sinusfunktion die Bildmenge des offenen Intervalls  $(-2\pi, 2\pi)$  die abgeschlossene Menge  $[-1, 1]$ . Für holomorphe Funktionen dagegen gilt, dass auch die Bildmengen offener Mengen offen sind. Um dies zu zeigen, benötigen wir ein auch für sich interessantes Lemma.

**Lemma 3.40 (Existenzsatz für Nullstellen).** *Sei  $f$  holomorph auf dem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  und die abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$ . Gilt auf deren Rand  $\min_{\zeta \in \gamma_r(z_0)} |f(\zeta)| > |f(z_0)|$ , dann hat  $f$  eine Nullstelle in  $B_r(z_0)$ .*

*Beweis.* Hätte  $f$  keine Nullstelle in  $B_r(z_0)$ , wäre insbesondere  $|f(z_0)| > 0$  und damit  $f$  auch nullstellenfrei auf  $\overline{B}_r(z_0)$ . Aus Stetigkeitsgründen muss somit ein  $r' > r$  existieren, so dass  $f$  auch nullstellenfrei auf  $B_{r'}(z_0)$  ist und damit  $g(z) := \frac{1}{f(z)}$  holomorph auf  $B_{r'}(z_0)$ . Aus Bemerkung 3.32 folgt

$$|g(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(z_0 + re^{it})| dt \leq \max_{\zeta \in \gamma_r(z_0)} |g(\zeta)|,$$

also wäre

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)| \leq \max_{\zeta \in \gamma_r(z_0)} |g(\zeta)| = \max_{\zeta \in \gamma_r(z_0)} \frac{1}{|f(\zeta)|} = \frac{1}{\min_{\zeta \in \gamma_r(z_0)} |f(\zeta)|}$$

und somit  $|f(z_0)| \geq \min_{\zeta \in \gamma_r(z_0)} |f(\zeta)|$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

**Satz 3.41 (Gebietstreue).** *Ist  $f$  holomorph und nicht konstant auf dem Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$ , so ist  $f(U)$  ebenfalls ein Gebiet.*

*Beweis.* Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist mit  $U$  auch  $f(U)$  wegweise zusammenhängend, denn sei  $\gamma$  ein stetiger Weg in  $U$ , der zwei Punkte  $z_1, z_2 \in U$  verbindet, so ist  $f \circ \gamma$  ein stetiger Weg in  $f(U)$ , der  $f(z_1)$  und  $f(z_2)$  verbindet. Somit ist nur noch nachzuweisen, dass auch die Bildmenge  $f(U)$  offen ist.

Dazu ist für beliebiges, aber festes  $z_0 \in U$  zu zeigen, dass  $f(U)$  eine offene Kreisscheibe  $B_\delta(f(z_0))$  um  $f(z_0)$  mit Radius  $\delta > 0$  enthält. Da  $f$  nach Voraussetzung nicht konstant ist, muss ein  $r > 0$  existieren, so dass  $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$  und  $f(z_0) \notin f(\gamma_r(z_0))$ . (Wäre das nicht der Fall, enthielte der Rand jeder Kreisscheibe um  $z_0$  einen Punkt  $\xi$  mit  $f(\xi) = f(z_0)$ , so dass eine gegen  $z_0$  konvergente Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  in  $U$  mit  $f(z_n) = f(z_0)$  für alle  $n \geq 1$  existieren würde; dann wäre aber nach dem Identitätssatz 3.38  $f \equiv f(z_0)$  konstant, Widerspruch!) Also gilt  $2\delta := \min_{\zeta \in \gamma_r(z_0)} |f(\zeta) - f(z_0)| > 0$ . Wir behaupten, dass  $B_\delta(f(z_0)) \subseteq f(B_r(z_0)) \subseteq f(U)$ . Für jedes  $z_1 \in B_\delta(f(z_0))$  ist  $|z_1 - f(z_0)| < \delta$  und damit nach der Dreiecksungleichung

$$|f(\zeta) - z_1| \geq |f(\zeta) - f(z_0)| - |f(z_0) - z_1| > \delta > |f(z_0) - z_1| \quad \text{für alle } \zeta \in \gamma_r(z_0),$$

also gilt auch  $\min_{\zeta \in \gamma_r(z_0)} |f(\zeta) - z_1| > |f(z_0) - z_1|$ . Nach Lemma 3.40, angewandt auf die Funktion  $g(z) := f(z) - z_1$ , existiert daher ein  $z' \in B_r(z_0)$  mit  $g(z') = 0$ , d.h.  $f(z') = z_1$ . Also hat jeder Punkt  $z_1 \in B_\delta(f(z_0))$  ein Urbild  $z'$  unter  $f$  in  $B_r(z_0)$ , so dass gilt  $B_\delta(f(z_0)) \subseteq f(B_r(z_0))$  wie gewünscht.  $\square$

**Korollar 3.42 (Maximumprinzip).** *Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f$  holomorph auf  $U$ . Ist  $f$  nicht konstant auf  $U$ , kann  $f$  sein Betragsmaximum nicht innerhalb von  $U$  annehmen (sondern nur auf  $\partial U$ , sofern  $U$  beschränkt und  $f$  stetig auf  $\overline{U}$  ist).*

*Beweis.* Gäbe es ein  $z_0 \in U$  mit  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ , wäre  $f(U)$  in der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{B}_{|f(z_0)|}(0)$  mit Radius  $|f(z_0)|$  um den Ursprung enthalten. Da  $f(z_0)$  auf dem Rand dieser Kreisscheibe liegt, kann  $f(U)$  keine noch so kleine offene Umgebung von  $f(z_0)$  enthalten und wäre somit kein Gebiet, im Widerspruch zu Satz 3.41. Der Zusatz ist damit offensichtlich.  $\square$

Aufgrund des Maximumprinzips ist auch der folgende Satz intuitiv sofort einleuchtend, auch wenn wir es zu seinem Beweis nicht benutzen.

**Satz 3.43 (Satz von Liouville).** *Jede ganze Funktion  $f$ , die beschränkt ist, ist konstant.*

*Beweis.* Sei  $|f| \leq M < \infty$ . Als ganze Funktion lässt sich  $f$  nach dem Potenzreihenentwicklungssatz auf ganz  $\mathbb{C}$  durch eine Potenzreihe um einen beliebigen Entwicklungspunkt  $z_0$  darstellen, so dass wir o.E.  $z_0 = 0$  wählen und  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  annehmen können. Für die Koeffizienten  $a_n$  mit  $n \geq 1$  gilt nach Satz 3.35

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^{n+1} e^{it(n+1)}} r i e^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^n} dt = \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

da  $a_n$  nicht von  $r$  abhängt. Also ist  $a_n = 0$  für alle  $n \geq 1$  und damit  $f \equiv a_0$ .  $\square$

**Bemerkung 3.44.** Der Satz von Liouville impliziert insbesondere, dass die komplexen Sinus- und Cosinusfunktionen im Gegensatz zu ihren reellwertigen Pendanten nicht beschränkt sein können, denn  $\sin(z)$  und  $\cos(z)$  sind nach Korollar 3.9 ganze Funktionen, die für  $z \in \mathbb{R}$  den gewohnten reellen Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  entsprechen, also nicht konstant sind. Daher müssen  $|\sin(z)|$  und  $|\cos(z)|$  für nicht-reelle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  beliebig groß werden, falls  $|z| \rightarrow \infty$ .

**Korollar 3.45 (Fundamentalsatz der Algebra).** *Jedes nicht konstante Polynom mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  hat mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Sei  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  für  $a_n \neq 0$  und  $n \geq 1$ . Dann gilt für  $|z| \rightarrow \infty$ , dass  $|f(z)| = |z|^n \cdot |a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}| \rightarrow \infty$ . Daher gibt es für jedes  $M > 0$  ein  $r > 0$ , so dass  $|f(z)| \geq M$  für alle  $|z| > r$ . Angenommen,  $f$  hätte keine Nullstelle. Dann gäbe es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $|f(z)| \geq \varepsilon$  für  $|z| \leq r$ , also wäre insgesamt  $\frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{\min(M, \varepsilon)} = \varepsilon^{-1}$  (Maximumprinzip) und damit  $\frac{1}{f}$  eine beschränkte, ganze Funktion. Nach dem Satz von Liouville 3.43 müsste dann aber  $\frac{1}{f}$  und damit auch  $f$  konstant sein, Widerspruch!  $\square$

**Bemerkung 3.46.** Induktiv folgt daraus durch Polynomdivision sofort, dass jedes nicht konstante komplexe Polynom in  $n$  Linearfaktoren zerfällt, d.h. es existieren  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  (nicht notwendigerweise verschieden), so dass  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$ . Mit anderen Worten hat jedes reelle oder komplexe Polynom von Grad  $n$  genau  $n$  Nullstellen (mit Vielfachheit) in  $\mathbb{C}$ .

Somit zerfällt beispielsweise auch das charakteristische Polynom jeder  $n \times n$ -Matrix über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  in (komplexe) Linearfaktoren, woraus folgt, dass jede quadratische Matrix eine (in der Regel komplexwertige) Jordan-Normalform besitzt.

Wir erinnern abschließend noch einmal daran, dass die Cauchy'sche Integralformel (Satz 3.31) und damit alle darauf aufbauenden Sätze und Folgerungen im Wesentlichen darauf beruhen, dass das Integral  $\int_{\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \neq 0$  ist, siehe Beispiel 3.13. Daher wäre es nicht übertrieben, im Umkehrschluss festzustellen: *Würde auch das Integral  $\int_{\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z-z_0} dz$  verschwinden, gäbe es keine Funktionentheorie!*