Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 13

Abgabetermin: Donnerstag, 03.02.2022, bis 14:00 Uhr per Mail an
timo.enger@stochastik.uni-freiburg.de
(Geben Sie im Dateinamen ihre Namen an.
Bitte geben Sie zu zweit ab.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Für die folgenden Aufgaben benötigen Sie die Cauchy'sche Integralformel.

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei $\partial B_r(z_0)$ jeweils die Kreislinie um den Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius r sei:

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{\sin(z)}{z-b}\,dz, \quad b \in \mathbb{C}, |b| \neq r, \qquad \int_{\partial B_3(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(i)} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz.$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel und der Standardabschätzung aus Aufgabe 2 b) von Übungsblatt 11, dass für eine auf $B_r(z_0)$ holomorphe Funktion f gilt $|f(z)| \leq |f|_{\partial B_r(z_0)} = \sup_{z\in\partial B_r(z_0)} |f(z)|$ für alle $z \in B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r\}$.

Hinweis: Wenn f holomorph in $B_r(z_0)$ ist, dann auch die k-te Potenzf^k für jedes $k \geq 1$ (warum?). Die obige Aussage ist übrigens ein Vorläufer des *Maximumprinzips*. Dies besagt, dass eine auf einem Gebiet G nicht-konstante holomorphe Funktion ihr Betragsmaximum nur auf dem Rand ∂G annehmen kann.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie mithilfe der Cauchy'schen Integralformel die folgenden Integrale:

a) $\oint_{|z+1|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz$,

b) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz$,

c) $\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz$,

d) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz$,

e) $\oint_{|z-2i|=3} \frac{z^2}{(z-2i)} dz$,

f) $\oint_{|z-2i|=3} \frac{3}{(z-i)} dz$,

g) $\oint_{|z-1|=2} \frac{z^{18}-2z^4+sin(z)}{(z-4)^2(z+3i)} dz$,

h) $\oint_{|z-(2+i)|=2} \frac{\ln(z)}{z^2-2} dz$.