Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 12

Abgabetermin: Donnerstag, 27.01.2020, bis 14:00 Uhr per Mail an
timo.enger@stochastik.uni-freiburg.de
(Geben Sie im Dateinamen ihre Namen an.
Bitte geben Sie zu zweit ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ und $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{R+z}{(R-z)z}$. Stellen Sie $f(z)$ als Summe zweier Brüche dar, die die Variable z nur im Nenner enthalten, und zeigen Sie dann durch Integration beider Darstellungen von $f(z)$ entlang des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$ mit $0 < r < R$, unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t) + r^2}\, dt = 1.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt lokal konstant, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ besitzt, so dass $f|_U$ konstant ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (i) Jede lokal-konstante Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist konstant.
   (ii) Für jede nicht-leere, offene und abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ gilt $A = X$.

b) Erfüllt X (i) und (ii), so nennt man X *zusammenhängend*. Zeigen Sie: Jeder wegzusammenhängende Raum X ist zusammenhängend.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie (in Erweiterung von Aufgabe 2), dass für jede nicht-leere, offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ gilt:
A ist genau dann zusammenhängend, wenn A wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete und sei $\varphi : U_1 \to U_2$ eine bijektive Abbildung, sodass φ und φ^{-1} holomorph sind. Zeigen Sie, dass dann gilt:
U_1 ist genau dann ein Elementargebiet, wenn U_2 ein Elementargebiet ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Ableitung einer holomorphen Funktion wieder holomorph ist.