Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 11

Abgabetermin: Donnerstag , 20.01.2022, bis 14:00 Uhr per Mail an timo.enger@stochastik.uni-freiburg.de
(Geben Sie im Dateinamen ihre Namen an.
Bitte geben Sie zu zweit ab.)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Formel die Gleichungen

i) $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$,

ii) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$,

iii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$,
$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) \qquad$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die aus der reellen Analysis bekannte Abschätzung auch im Komplexen gilt:

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt,$$

wobei das Integral auf der linken Seite als Kurvenintegral im Sinne von Definition 3.10 mit $\gamma : [a, b] \to [a, b]$, $t \mapsto t$ aufgefasst werden kann.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass für einen (stückweise) stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und jede auf γ stetige, komplexwertige Funktion f die folgende *Standardabschätzung* gilt:

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq |f|_\gamma\, L(\gamma), \quad \text{wobei } |f|_\gamma := \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \text{ und } L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

($L(\gamma)$ ist die (euklidische) Länge des Wegs γ in der Ebene.)

c) Folgern Sie aus b): Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein (stückweise) stetig differenzierbarer Weg und $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexwertiger, auf γ stetiger Funktionen, so dass die Partialsummen $\sum_{n=0}^m f_n$ auf $\gamma([a, b])$ gleichmäßig gegen $f := \sum_{n\geq 0} f_n$ konvergieren, dann gilt

$$\sum_{n\geq 0} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{n\geq 0} f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Bemerkung: Wie im Reellen kann man zeigen (mit praktisch demselben Beweis, den Sie hier nicht ausführen müssen), dass die gleichmäßige Konvergenz auch die Stetigkeit von f impliziert.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ein komplexes Polynom. Zeigen Sie, dass für alle $\xi \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ die Formel

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\xi)^{k+1}} dz$$

gilt, wobei $\gamma(t) = \xi + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ gilt und $f^{(k)}$ die k-te Ableitung bezeichne.

Hinweis: Warum genügt es, die Formel nur für $f(z) = z^n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

a) Sei γ eine Kreislinie in $\mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ um den Ursprung. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \bar{z}\, dz$.

b) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene, stetig differenzierbare Kurve. Geben Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy und eines weiteren, aus dem 2. Kapitel der Vorlesung bekannten Integralsatzes, den Wert des Integrals $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ an.

   Hinweise: Eine Idee, was herauskommen könnte, vermittelt schon Aufgabenteil a). Für den hier vorliegenden allgemeinen Fall überlege man sich zunächst, was denn der Wert des reellen Integrals $\int_\gamma x\, dy$ im $\mathbb{R}^2$ sein könnte. Dazu gibt es in Kapitel 2 des Vorlesungsskripts eine sehr hilfreiche Bemerkung.