Übungen zur Vorlesung
"Erweiterung der Analysis"

Blatt 10

Abgabetermin: Donnerstag, 13.01.2022, bis 14:00 Uhr per Mail an
timo.enger@stochastik.uni-freiburg.de
(Geben Sie im Dateinamen ihre Namen an.
Bitte geben Sie zu zweit ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Jede unendlich oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist auch holomorph aufgefasst als Funktion $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C}$.

b) Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph.

c) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z\overline{z}$ ist holomorph.

d) Es sei $(z_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ eine konvergente komplexe Folge mit $z_n \to 0$, dann existiert auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_{k+1} - z_k).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)} \quad \left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4, \qquad \text{b)} \quad \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1-i)^3}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{k=0}^{7} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die komplexe Multiplikation $z \mapsto cz$ mit $c = a+ib$ einer Matrixmultiplikation der Real- und Imaginärteile von z mit der Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ entspricht. Zeigen Sie, dass $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Wie lässt sich mit diesem Ergebnis die komplexe Multiplikation geometrisch im $\mathbb{R}^2$ interpretieren?

b) Für $m \in \mathbb{N}$ heißt $z_{(m)} \in \mathbb{C}$ m*-te Einheitswurzel*, falls $z_{(m)}$ eine Nullstelle der Funktion $f(z) = z^m - 1$ ist. Begründen Sie mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ genau m verschiedene Einheitswurzeln $z_{(m)}^{(k)}$, $0 \leq k \leq m-1$, gibt, und geben Sie für diese eine explizite Darstellung an. Zeigen Sie ferner, dass für die Einheitswurzeln die Beziehungen

$$\sum_{k=0}^{m-1} z_{(m)}^{(k)} = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{k=0}^{m-1} z_{(m)}^{(k)} = (-1)^{m+1}$$

gelten, und begründen Sie damit das in Aufgabe 2 c) erhaltene Ergebnis.