# Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

## Blatt 9

**Abgabetermin:** Freitag, 07.01.2022, bis 14:00 Uhr per Mail an
timo.enger@stochastik.uni-freiburg.de
(Geben Sie im Dateinamen ihre Namen an.
Bitte geben Sie zu zweit ab.)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es sei $\underline{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, dann gilt

$$\underline{\nabla}(\mathrm{rot}(\underline{f})) = 0.$$

b) Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, dann gilt $\partial A \neq \emptyset$.

c) Der Satz von Stokes in Dimension 2 folgt aus dem Satz von Stokes in Dimension 3.

d) Es sei $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, so dass für jede geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve $\underline{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$$\oint_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = 0$$

gilt, dann ist $\mathrm{rot}(\underline{f}) = 0$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Es bezeichne $K_{\frac{1}{2}}$ die obere Halbkugel parametrisiert wie in Beispiel 2.25. Es sei außerdem die Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \arctan(x^2 - z^3)e^{-\sin(y)} \in \mathbb{R}$$

gegeben. Berechnen Sie

$$\int_{K_{\frac{1}{2}}} (\underline{x} \times \underline{\nabla}\phi(\underline{x})) \cdot d\underline{x}.$$

Hinweis: Ist die genaue Gestalt von $\phi$ wirklich wichtig?

(bitte wenden)

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ die durch $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq \sqrt{3}\}$ gegebene Fläche. Berechnen Sie für

$$\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \underline{f}(x,y,z) = \left(-1, -\tfrac{x}{2}z^2, x\right)$$

das Oberflächenintegral

$$\int_{F,\underline{n}} \operatorname{rot} \underline{f}(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, welche Form die obige Fläche hat, und suchen Sie eine einfachere Fläche, die den gleichen Rand $\partial F$ besitzt, um das Integral mit Hilfe des Satzes von Stokes zu vereinfachen.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Seien $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit glattem Rand $\partial F$ und $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ sowie $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie

$$\int_{F,\underline{n}} \underline{\nabla} f(\underline{x}) \times \underline{\nabla} g(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_{\partial F} f(\underline{x}) \underline{\nabla} g(\underline{x}) \cdot d\underline{x}.$$

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Start ins neue Jahr!