Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 8

Abgabetermin: Donnerstag, 16.12.2021, bis 14:00 Uhr per Mail an
timo.enger@stochastik.uni-freiburg.de
(Geben Sie im Dateinamen ihre Namen an.
Bitte geben Sie zu zweit ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es sei A offen und Jordan-messbar und $g \in \mathcal{C}_c^2(A, \mathbb{R})$, dann gilt

$$\int_A \Delta g(\underline{x}) d\underline{x} = 0.$$

b) Es sei A offen und Jordan-messbar und $f, g \in \mathcal{C}_c^2(A, \mathbb{R})$, dann gilt

$$\int_A f \Delta(g)(\underline{x}) d\underline{x} = \int_A \Delta(f) g(\underline{x}) d\underline{x}.$$

c) Es sei A offen und Jordan-messbar und $f \in \mathcal{C}_c^1(A, \mathbb{R})$, dann gilt für $B \subset A$ Jordan-messbar:

$$\int_B \operatorname{div}(f)(\underline{x}) d\underline{x} = 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} < 1\}$. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Integral

$$\int_{\partial A, \underline{n}} \underline{F}\, d\underline{x}, \quad \text{wobei} \quad \underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{F}(x, y, z) = \left(3x^2 z, y^2 - 2x, z^3\right)$$

sei und $\underline{n}$ das äußere Einheitsnormalenfeld bezeichne.

Hinweis: A lässt sich als Bild eines wohlbekannten Körpers im $\mathbb{R}^3$ darstellen, so dass sich das Volumenintegral mit Hilfe des Transformationssatzes und Verwendung von Kugelkoordinaten ausrechnen lässt.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränkter $\mathcal{C}^1$-Polyeder mit äußerem Einheitsnormalenfeld $\underline{n}$, der den Koordinatenursprung $\underline{0}$ enthalte. Sei $\alpha(\underline{x}) = \angle(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}))$, $\underline{x} \in \partial A$, der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\underline{x}$ und dem Einheitsnormalenvektor $\underline{n}(\underline{x})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß

$$\int_{\partial A, \underline{n}} \frac{\cos(\alpha(\underline{x}))}{\|\underline{x}\|^2} \, d\underline{x} = 4\pi.$$

Bemerkung: Wenn Sie auch Physik-Vorlesungen hören oder gehört haben, ist Ihnen diese Aussage vielleicht schon einmal in der Physiker-Notation $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = 4\pi\delta(\vec{r})$ begegnet, die z.B. in der Elektrostatik (Coulomb-Potential) auftritt.

Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a) Begründen Sie kurz die Gleichung $\cos(\alpha(\underline{x})) = \langle \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}, \underline{n}(\underline{x}) \rangle$ und berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\underline{f}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|^3}$

b) Überlegen Sie sich, warum der Satz von Gauß nicht direkt auf den Polyeder A anwendbar ist, und wenden Sie ihn stattdessen auf $A \setminus B_\epsilon(\underline{0})$ an, um ein zum obigen Integral äquivalentes Integral zu erhalten. Dabei bezeichne $B_\epsilon(\underline{0}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < \epsilon^2\}$ die offene Kugel mit Radius ϵ um den Ursprung, die für genügend kleines $\epsilon > 0$ ganz in A enthalten ist (warum?).

   Achten Sie auf die richtige Orientierung des Einheitsnormalenvektors auf den Randflächen!

c) Rechnen Sie nun das zum obigen Integral äquivalente Integral mit Hilfe von Kugelkoordinaten aus.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ offen und Jordan-messbar, $f \in \mathcal{C}_c^1(A, \mathbb{R})$ und $\underline{\phi} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_A \langle \underline{\nabla} f(\underline{x}), \underline{\phi}(\underline{x}) \rangle d\underline{x} = -\int_A f(\underline{x}) \operatorname{div}(\underline{\phi})(\underline{x}) d\underline{x}$$

gilt.