Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 7

Abgabetermin: Donnerstag, 09.12.2021, bis 14:00 Uhr per Mail an timo.enger@stochastik.uni-freiburg.de
(Geben Sie im Dateinamen ihre Namen an.
Bitte geben Sie zu zweit ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Darstellung der Tangentialebene $T_{(2,\sqrt{3},1)}$ an die durch

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 4\}$$

gegebene Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $(2,\sqrt{3},1)$.

Hinweis: Stellen Sie zunächst die Fläche F als Vereinigung zweier Flächenstücke dar, die jeweils Graphen zweier Funktionen $\underline{g}_i : B_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$, sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $K_{\frac{1}{2}}$ die Oberfläche einer Halbkugel mit Radius 1, also

$$K_{\frac{1}{2}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{K_{\frac{1}{2}}} (2z, e^x, 1) \cdot d(x,y,z).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei F das durch den Graphen der Funktion $g : (0,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y$ gegebene Flächenstück. Berechnen Sie das Oberflächenintegral erster Art $\int_F f(\underline{x})\, d\underline{x}$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x$.

Hinweis: Beim Ausrechnen des Integrals werden Sie auf einen Wurzelterm stoßen. Substituieren Sie den Ausdruck unter der Wurzel durch eine neue Variable, um weiterrechnen zu können.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $h > 0$ mit $f(z) > 0$ für alle $z \in [0,h]$. Wir betrachten die Menge

$$O_{R_f} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq f(z),\ z \in (0,h),\ x^2 + y^2 = f(z)^2\}.$$

Zeigen Sie, dass O_{R_f} eine Einbettung eines Flächenstücks ist und, dass

$$\int_{O_{R_f}} 1 d\underline{x} = 2\pi \int_0^h f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}dt$$

gilt.