# Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

## Blatt 6

**Abgabetermin:** Donnerstag, 02.12.2021, bis 14:00 Uhr per Mail an
timo.enger@stochastik.uni-freiburg.de
(Geben Sie im Dateinamen ihre Namen an.
Bitte geben Sie zu zweit ab.)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Eine $\mathcal{C}^2$-Kurve $\underline{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn

$$\langle \underline{\gamma}'(t), \underline{\gamma}''(t) \rangle = 0$$

für alle $t \in (a,b)$ gilt.

b) Es sei $d > 0$, dann ist jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ auch konvex.

c) Das Vektorfeld $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\underline{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

ist ein Gradientenfeld.

d) Sei $A$ eine wegweise zusammenhängende offene Teilmenge in $\mathbb{R}^d$. Definiere für $x, y \in A$

$$d(x,y) := \inf\{\int_{\underline{\gamma}} 1dx \mid \underline{\gamma} \in \mathcal{C}^1([0,1], A),\ \underline{\gamma}(0) = x,\ \underline{\gamma}(1) = y\}.$$

Dann ist $d$ eine Metrik.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Es seine $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(x) \le f(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Wir betrachten die geschlossene stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\underline{\gamma} : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} (t, g(t)), & \text{für } t \in [0,1] \\ (1, (2-t)g(1) + (t-1)f(1)), & \text{für } t \in [1,2] \\ (3-t, f(3-t)), & \text{für } t \in [2,3] \\ (0, (4-t)f(0) + (t-3)g(0)), & \text{für } t \in [3,4] \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\oint_{\underline{\gamma}} \underline{F}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$$

für

$$\underline{F}(x,y) = (0,x) \text{ und für } \underline{F}(x,y) = (-y,0).$$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie für das rotationssymmetrische Vektorfeld

$$\underline{g} : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^d,\ \underline{g}(\underline{x}) = f(\|\underline{x}\|) \cdot \underline{x} \qquad \text{mit } \|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$$

ein Potential.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \underline{f}(\underline{x}) = (xy, x^2, x - z)$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral zweiter Art

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x},$$

vom Ursprung $(0,0,0)$ zum Punkt $(1,2,4)$, wobei

a) $\underline{\gamma}$ die gerade Verbindung zwischen den beiden Punkten ist,

b) $\underline{\gamma}$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve ist mit $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\underline{\gamma}(t) = (t^2, 2t^3, 4t)$.

c) Vergleichen und begründen Sie Ihre Ergebnisse aus a) und b).