Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 5

Abgabetermin: Donnerstag, 25.11.2021, bis 14:00 Uhr im Briefkasten 3.29, UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_H y d(x,y)$$

mit

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

HINWEIS: Polarkoordinaten!

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ das von den Vektoren

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Parallelogramm. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 12x\, dx\, dy$$

durch Verwendung einer geeigneten Koordinatentransformation.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{A_2} (x^2 + y^2)^{\frac{a}{2}}\, dx\, dy = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{A_2 \setminus A_2^\epsilon} (x^2 + y^2)^{\frac{a}{2}}\, dx\, dy,$$

wobei $A_2 = A_2^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ mit Radius 1 und $A_2^\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \epsilon^2\}$ der Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Radius ϵ um den Ursprung bezeichne?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Ein Dreieck $A \subset \mathbb{R}^2$ habe die Eckpunkte $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$. Berechnen Sie den Schwerpunkt von A mit Hilfe des Transformationssatzes.

HINWEIS: Parametrisieren Sie die Dreiecksfläche mit Hilfe eines Eckpunkts und zwei Verbindungsvektoren zwischen zwei Eckpunkten.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

a) Zwei (unendlich hohe) Kreiszylinder mit Radius R liegen so, dass ihre Symmetrieachsen mit der x-Achse bzw. der y-Achse übereinstimmen. Bestimmen Sie das Volumen der Menge, die innerhalb beider Zylinder liegt.

b) Berechnen Sie das Volumen des Schnittes der dreidimensionalen Kugel $A_3^R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ mit Radius R mit dem Halbraum $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq \frac{R}{2}\}$

HINWEIS: Zur Lösung der Aufgabe sind *Zylinderkoordinaten* hilfreich, die durch die folgende Abbildung $\underline{\varphi}$ gegeben sind:

$$\underline{\varphi}: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\} \\ (r, \alpha, z) & \mapsto (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha), z). \end{cases}$$

Berechnen Sie zunächst die Determinante der Jacobi-Matrix von $\underline{\varphi}$ und überzeugen Sie sich, dass $\underline{\varphi}$ ein Diffeomorphismus ist.