Übungen zur Vorlesung
"Erweiterung der Analysis"

Blatt 4

Abgabetermin: Donnerstag, 18.11.2021, bis 14:00 Uhr im Briefkasten 3.29, UG
Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und $h > 0$. Wir betrachten die Menge

$$K := \{((1-t)x, (1-t)y, th) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A,\ t \in [0,1]\}.$$

Benutzen Sie das Prinzip von Cavalieri um zu zeigen, dass

$$\lambda(K) = \frac{h}{3}\lambda(A).$$

Sie müssen nicht zeigen, dass K Jordan-messbar ist. Welchen geometrischen Objekt entspricht K?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In Aufgabe 2 auf Blatt 3 haben sie das Volumen der 4-dimensionalen Einheitskugel ausgerechnet. Sei nun analog

$$A_d := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\}$$

die Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$. Stellen Sie eine Rekursionsformel für ihr Volumen $\lambda(A_d)$ auf und lösen Sie diese (die Volumina $\lambda(A_1) = 2$ und $\lambda(A_2) = \pi$ der ersten beiden Einheitskugeln dürfen dabei als bekannt vorausgesetzt werden).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt (x_S, y_S) des oberen Einheitshalbkreises $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks $D \subset \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(a,0)$ und $(\frac{a}{4}, b)$, wobei $a, b > 0$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die in der Vorlesung und in Aufgabe 3 berechneten Schwerpunkte sind *geometrische* Schwerpunkte, bei denen man implizit eine konstante Massendichte mit Wert 1 annimmt. Der *physikalische* Schwerpunkt berechnet sich wie folgt: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper, so ist seine Gesamtmasse M gegeben durch

$$M = \int_K \rho_K(x,y,z)\, d(x,y,z),$$

wobei $\rho_K : K \to (0,\infty)$ die zugehörige Massendichte von K ist. Der physikalische Schwerpunkt (x_S, y_S, z_S) ist dann definiert durch

$$x_S = \frac{1}{M}\int\limits_K x\rho(x,y,z)\, d(x,y,z),\ y_S = \frac{1}{M}\int\limits_K y\rho(x,y,z)\, d(x,y,z),\ z_S = \frac{1}{M}\int\limits_K z\rho(x,y,z)\, d(x,y,z).$$

Sei nun $K = [1,2] \times [0,\pi/2] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Dichtefunktion $\rho_K(x,y,z) = y\sin(xy)$. Berechnen Sie die Gesamtmasse und den Schwerpunkt von K.

Hinweis: Die x-Koordinate x_S des Schwerpunkts wird sich nicht explizit berechnen lassen. Vereinfachen Sie in diesem Fall das auftretende Integral so weit wie möglich.