Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 3

Abgabetermin: Donnerstag, 11.11.2021, bis 14:00 Uhr im Briefkasten 3.29, UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn
$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{Q_{-1}} f(\underline{x}) d\underline{x}_{-1} \right) dx_1$$
existiert, dann ist f integrierbar.

b) Jede endliche Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ ist eine Jordan-Nullmenge.

c) Jede abzählbare Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ ist eine Jordan-Nullmenge.

d) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte Menge, so dass $\bar{A}$ und A° Jordan-messbar sind, dann ist auch A Jordan-messbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der 4-dimensionalen Einheitskugel, d.h. der Menge
$$A_4 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \le 1\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ und es sei $P = \{a\underline{x} + b\underline{y} \mid a, b \in [0,1]\}$ das von den Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{y}$ aufgespannte Parallelogramm. Zeigen Sie:
$$\lambda(P) = det(\underline{x}, \underline{y}).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Sei $I = [0,1]$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ stetig. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\varphi(I)$ eine Jordan-Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist.
Hinweis: Suchen Sie doch mal im Web nach Peano-Kurven.

b) Man beginnt mit dem abgeschlossenen Intervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Aus diesem Intervall wird das offene mittlere Drittel entfernt, sodass die beiden Intervalle $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ und $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ übrig bleiben. Aus diesen beiden Intervallen wird wiederum jeweils das offene mittlere Drittel entfernt und man erhält nun vier Intervalle: $\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ und $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Das Entfernen der mittleren Drittel wird unendlich oft wiederholt. Die Menge, die dabei entsteht, wird Cantormenge genannt und ist überabzählbar.
Prüfen Sie, ob die Cantormenge Jordan-messbar ist und bestimmen Sie ggf. den Jordan-Inhalt.