Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 2

Abgabetermin: Donnerstag, 04.11.2021, bis 14:00 Uhr im Briefkasten 3.29, UG
Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen Sie Theorem 1.12:
Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader und die Funktionen $f, g, f_1, f_2, \dots : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

a) Die Funktionen f^+, f^- und $|f|$ sind integrierbar.

b) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar mit
$$\int_Q (\alpha f + \beta g)(\underline{x})\, d\underline{x} = \alpha \int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} + \beta \int_Q g(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

c) Die Funktion fg ist integrierbar. Gibt es außerdem ein $c \in \mathbb{R}$ mit $g \geq c > 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ integrierbar.

d) Ist $f \leq g$, so ist auch
$$\int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} \leq \int_Q g(\underline{x})\, d\underline{x}.$$
Insbesondere gilt
$$\Big| \int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} \Big| \leq \int_Q |f(\underline{x})|\, d\underline{x}.$$

e) Gilt $f_n \xrightarrow{n\to\infty} h$ gleichmäßig für ein $h : Q \to \mathbb{R}$, so ist h integrierbar mit
$$\lim_{n\to\infty} \int_Q f_n(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_Q h(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

Hinweis: Auch wenn Sie eine Teilaufgabe nicht gelöst haben, dürfen Sie deren Aussage in den folgenden Teilaufgaben verwenden. Um die Integrierbarkeit von $|f|$ in Aufgabenteil a) zu zeigen, dürfen Sie Aufgabenteil b) verwenden.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Es sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie
$$\int_Q x e^{xy} d(x,y).$$
Begründen Sie dabei jeden Schritt.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \mathbb{1}_{(0,1]\times(0,1]}(x_1, x_2)$$

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1.$$

Ergibt sich daraus ein Widerspruch zum Satz von Fubini? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Die inverse Tangensfunktion $\arctan(x)$ hat die Ableitung $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.