Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Blatt 1

Abgabetermin: Donnerstag, 28.10.2021, bis 14:00 Uhr im Briefkasten 3.29, UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die invertierbaren $d \times d$-Matrizen mit $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, die d-dimensionalen Quader mit Qu_d und mit

$$G := \{A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \mid A(Q) \in \mathrm{Qu}_d \ \forall Q \in \mathrm{Qu}_d\}$$

die Menge aller linearen Abbildungen, die Quader auf Quader abbildet. Zeigen Sie:

a) G ist eine Gruppe.
HINWEIS: Überlegen Sie sich zunächst, dass alle $g \in G$ jeden Standardbasisvektor auf ein Vielfaches eines Standardbasisvektor abbildet.

b) Für alle $g \in G$ und alle Quader $Q \in \mathrm{Qu}_d$ gilt:

$$\lambda(g(Q)) = |det(g)| \cdot \lambda(Q).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $D = \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$ eine endliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^d$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} a_i, & \text{falls } \underline{x} = \underline{x}_i \text{ für ein } i \text{ mit } 1 \le i \le k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}$ beliebige, aber fest gewählte reelle Zahlen sind. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader, der die Menge D umfasst ($Q \supseteq D$). Zeigen Sie, dass f über Q integrierbar ist mit

$$\int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} = 0.$$

Folgern Sie, dass sich der Wert $\int_Q g(\underline{x})\, d\underline{x}$ nicht ändert, wenn man die Funktionswerte der über den Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ integrierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ an endlich vielen Stellen $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in Q$ beliebig abändert.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Funktionen, ob sie integrierbar über Q ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $f(x_1, x_2) = 1$ falls $x_1 \in \mathbb{Q}$ und $x_2 \in \mathbb{Q}$, und 0 sonst.

b) $f(x_1, x_2) = 1$ falls $x_1 \in \mathbb{Q}$ und $x_2 \in \mathbb{Q}$ und $x_1 = x_2$, und 0 sonst.

c) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{q+s}$ falls $x_1 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ und $x_2 = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ gekürzte Brüche (Betrachte 0 als $0 = \frac{0}{1}$) sind, und 0 sonst.

   Hinweis: Verwenden Sie das in Aufgabe 2 Gezeigte.