Übungen zur Vorlesung "Erweiterung der Analysis"

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1\,e^{x_2}+\sin(x_1) \\ x_1\,x_2^2\,x_3^3\,e^{x_1x_2^2}\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_3\log\left(1+\frac{x_1x_3}{1+x_2^2}\right) \\ (x_1^3+x_2^3+x_3^3)^{\frac{7}{4}}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der beschränkten Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x)=x^3-3x$ und $g(x)=2x^2$ eingeschlossen wird.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_e^{2e}\frac{\log(x)}{x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_1^2 4xe^{x^2-4}\,dx.$$

c) Berechnen Sie

$$\int_e^{e^2} x\log(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2e^{-x}\,dx.$$

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx$.

b) Berechnen Sie, aufbauend auf Teil a), $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx$ für alle $n\geq 1$.

c) Zeigen Sie

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(\ell x)\,dx=\begin{cases}1, & \text{falls } k=\ell,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5.$$

Können Sie auch das Ergebnis benennen, wenn wir den Exponenten 5 durch eine beliebige natürliche Zahl $m\in\mathbb{N}$ ersetzen würden?