

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. Thorsten Schmidt¹

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesung im WS 2019/00

Stand: 4. Dezember 2019

¹www.stochastik.uni-freiburg.de/schmidt

Inhaltsverzeichnis

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie	4
1.1 Einführung	4
1.2 Die Fortsetzung von Maßen	12
1.3 Maße auf \mathbb{R}	16
1.4 Hilberträume	23
1.5 Signierte Maße und der Satz von Radon-Nikodým	24
1.6 Produkträume	30
1.7 Der Satz von Fubini	34
1.8 Der Existenzsatz von Kolmogorov	37
2. Wahrscheinlichkeitstheorie	39
2.1 Grundlagen	39
2.2 Charakteristische Funktionen	45
2.3 Stochastische Konvergenz	47
2.4 Das starke Gesetz der großen Zahlen	56
2.4.1 Der Beweis des starken Gesetzes	59

Vorwort

Dieses Skriptum ist vorläufig ! Es enthält offensichtlich noch viele Fehler – also bitte mit dem entsprechenden Fingerspitzengefühl lesen. Für Rückmeldungen sind wir natürlich äußerst dankbar und würden uns über eine Email sehr freuen.

Freiburg, im Oktober 2019

Thorsten Schmidt

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Die Entwicklung eines präzisen Begriffs für Wahrscheinlichkeit hat die Mathematiker sehr lange beschäftigt. Es war die Idee von Andrei N. Kolmogorov (1903–1987) das Hilfsmittel „Maß“ aus der Analysis hierfür zu verwenden und Zugang zu der mächtigen Maß-Integrationstheorie von Henri L. Lebesgue (1875–1941) zu erlangen.

Aus diesem Grund sind die Begriffe *Maß* und *Integral* für Stochastiker besonders wichtig. Im Unterschied zur Analysis, beziehungsweise zum Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n , sind wir allerdings stets an endlichen Maßen ($\mu(\Omega) = 1$) interessiert, aber mit einem beliebigen Ω . Dieser Abschnitt wiederholt kurz die notwendigen Techniken aus der Analysis III.

1.1 Einführung

Ein zentrales Konzept wird die Erzeugung von σ -Algebren sein, worauf wir einen besonderen Augenmerk richten. Sei Ω eine (beliebige) Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Teilmengen von Ω .

Definition 1.1. Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ -Algebra (auf Ω), falls für alle $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ gilt, dass

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii) $A^c \in \mathcal{F}$
- (iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von Omega. Der Schnitt von (beliebig vielen) σ -Algebren ist wieder eine σ -Algebra (\rightarrow Übung), so dass man für ein $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die von \mathcal{C} erzeugte σ -Algebra definiert durch

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} \supseteq \mathcal{C} : \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}.$$

Ein *topologischer Raum* (Ω, \mathcal{O}) ist ein Raum Ω mit einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, wobei die Elemente von \mathcal{O} als offen bezeichnet werden, so dass

- (i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{O}$
- (ii) der endliche Schnitt von offenen Mengen ist wieder offen
- (iii) die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen.

Definition 1.2. Sei (Ω, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann heißt $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{O})$ die *Borel- σ -Algebra* auf (Ω, \mathcal{O}) .

Hat \mathcal{O} eine abzählbare Basis¹ B , so ist $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(B)$. \rightarrow Übung.

Insbesondere erzeugt $C = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{Q}\}$ die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Das gilt auch für die 2-Punkt-Kompaktifizierung

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Oft gibt es geeignete, einfache erzeugende Systeme²

Definition 1.3. Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Dynkin-System*, falls für alle $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{D}$ gilt:

- (i) $\Omega \in \mathcal{D}$
- (ii) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{D}$
- (iii) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$

Natürlich ist jede σ -Algebra ein Dynkin-System. Ein Mengensystem \mathcal{C} heißt *durchschnittsstabil*, falls mit $A, B \in \mathcal{C}$ auch $A \cap B \in \mathcal{C}$.

Lemma 1.4. Ist \mathcal{D} ein Dynkin-System und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ durchschnittsstabil, so gilt

$$\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}.$$

Insbesondere ist jedes durchschnittsstabile Dynkin-System eine σ -Algebra.

¹Eine Menge B heißt Basis, falls sich jede offene Menge als Vereinigung beliebig vieler Mengen aus B schreiben lässt.

²In der englischen Literatur heißt ein durchschnittliches System π -System; ein Dynkin-System λ -System (s. Billingsley(1995)).

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Beweis. Wir definieren

$$\lambda(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} \supseteq \mathcal{C} : \mathcal{F} \text{ Dynkin-System} \}$$

Da der Schnitt von Dynkin-Systemen wieder ein Dynkin-System ist, ist $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$. Der Rest des Beweises unterteilt sich in drei Schritte:

1. $\lambda(\mathcal{C})$ ist durchschnittsstabil: Seien $A, B \in \lambda(\mathcal{C})$. Sind $A, B \in \mathcal{C}$, so folgt auch $A \cap B \in \mathcal{C} \subseteq \lambda(\mathcal{C})$. Sei nun lediglich $B \in \mathcal{C}$ und

$$\mathcal{D}_B := \{ A \subseteq \Omega : A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}) \}.$$

Dann ist \mathcal{D}_B ein Dynkin-System, denn für $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}_B$ gilt

(i) $\Omega \in \mathcal{D}_B$

(ii) Sind $A_1 \cap B, A_2 \cap B \in \lambda(\mathcal{C})$ mit $A_1 \subseteq A_2$, so folgt

$$(A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) = (A_2 \setminus A_1) \cap B \in \lambda(\mathcal{C}).$$

(iii) ebenso $A_i \cap B \subseteq A_{i+1} \cap B \Rightarrow$

$$\left(\bigcup A_i \right) \cap B = \bigcup (A_i \cap B) \in \lambda(\mathcal{C}).$$

Da $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_B$ folgt nun $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}_B$.

Wir erhalten für $A \in \lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}_B$, dass

$$A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}). \quad (\text{Def. von } \mathcal{D}_B)$$

Nun setzen wir für $A \in \lambda(\mathcal{C})$

$$\mathcal{D}_A := \{ B \subseteq \Omega : A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}) \}.$$

Wie vorher zeigt man, dass \mathcal{D}_A ein Dynkin-System ist mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$. Wieder folgt $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}_A$, also für $A, B \in \lambda(\mathcal{C})$ gerade

$$A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}). \quad \text{Das war 1)}$$

2. $\lambda(\mathcal{C})$ ist σ -Algebra: Für $A_1, A_2, \dots \in \lambda(\mathcal{C})$ ist

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c \right)^c \in \lambda(\mathcal{C}) \quad (A^c \in \mathcal{D}, \mathcal{D} \text{ Dynkin})$$

und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_i \in \lambda(\mathcal{C}).$$

3. Abschließend erhalten wir $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\lambda(\mathcal{C})) = \lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$.

□

Nun kommen wir zu den wichtigen Begriffen **Maß** und **Kapazität**. Die folgenden Begriffe kann man auch für Ringe und Halbringe anstelle von σ -Algebren definieren. Auch kann man signierte Maße mit möglicherweise negativen Werten betrachten. Wir setzen $\bar{\mathbb{R}}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Definition 1.5. Sei \mathcal{F} eine σ -Algebra und $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Gilt für $(A_i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$ paarweise disjunkt, dass

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$,

so heißt μ *Maß*. Das Maß μ heißt *endlich*, falls $\mu(\Omega) < \infty$, und es heißt *σ -finit*, falls es $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ gibt, so dass $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Eigenschaft (ii) heißt *σ -Additivität*. Interessant ist es, sich Mengenfunktionen anzuschauen, wo in (ii) \leq auftaucht, μ also nur sub-additiv (monoton) ist. Dann heißt μ **Kapazität** oder – was wir später noch kennen lernen – äußeres Maß.

Endliche, additive Mengenfunktionen heißen oft **Inhalt**, σ -additive Mengenfunktionen, die nicht auf σ -Algebren definiert sind, **Prämaß**.

Die Fortsetzung von Maßen ist ein wichtiges Hilfsmittel: Das Lebesgue-Maß etwa definiert man durch

$$\mu([a, b]) := b - a \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

und setzt dann geeignet auf $\sigma(\mathbb{Q})$ fort. Wie das technisch funktioniert, soll nun erläutert werden.

Definition 1.6. Ein Mengensystem $\{\emptyset\} \neq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Halbring*, falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{H}$

(ii) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$ (durchschnittsstabil)

(iii) Für $A, B \in \mathcal{H}$ gibt es p. d. Mengen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{H}$, s. d.

$$B \setminus A = \sum_{i=1}^n C_i.$$

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Definition 1.7. Ein nicht-leeres Mengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Ring*, falls

- (i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
- (ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$
- (iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{R}$.

Ein Ring \mathcal{R} heißt *Algebra*, falls $\Omega \in \mathcal{R}$. Eine σ -Algebra erfüllt zusätzlich die σ -Additivität.

Beispiel 1.8. $\mathcal{H} = \{(a, b], a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b\}$ ist Halbring und $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Wir nennen eine Funktion $\mu : \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ *additiv*, falls für alle paarweise disjunkten $A, B \in \mathcal{H}$ mit $A \cup B \in \mathcal{H}$ gilt, dass

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Lemma 1.9. Sei \mathcal{H} ein Halbring mit $\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ *additiv*. Dann gilt:

- (i) μ ist *monoton und subadditiv*
- (ii) μ ist σ -*additiv* $\Rightarrow \mu$ ist σ -*subadditiv*

Wir beginnen mit einer Aussage, die wir noch öfter brauchen: Sei \mathcal{H} ein Halbring und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$. Dann ist

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n B_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} D_{i,j} \quad (1.10)$$

mit disjunkten Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{H}$ bzw. $(D_{i,j}) \in \mathcal{H}$. Den Beweis hierfür führen wir mit Induktion: Für $n = 2$ folgt das aus der Halbring-Eigenschaft (ii). Gilt die Behauptung für ein n , so ist

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \underbrace{\left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=2}^n A_i \right)}_{= \sum_{i=1}^k D_i} \setminus A_1 = \sum_{i=1}^k D_i \setminus A_1.$$

Da \mathcal{H} ein Halbring ist gibt es $(E_{ij})_{i=1, \dots, k}$ so dass

$$D_i \setminus A_1 = \sum_{j=1}^{k_i} E_{ij}, \text{ also ist}$$

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k_i} E_{ij}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass μ monoton ist. Seien $A, B \in \mathcal{H}$, $A \subseteq B \Rightarrow$

$$B = A + B \setminus A = A + \sum_{i=1}^k D_i,$$

mit $D_i \in \mathcal{H}$, also ist $\mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^k \mu(D_i) \geq \mu(A)$.

Nun zeigen wir, dass μ auch subadditiv ist: Seien $A_1, \dots, A_n, \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \mu\left(\sum_{i=1}^n B_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} D_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \mu(D_{ij}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \mu(D_{ij}) + \sum \cdots = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Als Letztes fehlt noch μ σ -additiv $\Rightarrow \mu$ σ -subadditiv. Dies folgt direkt wie (1.11). \square

Beispiel 1.12. Die Rückrichtung gilt **nicht**: Man wähle zum Beispiel den Halbring $\mathcal{H} = \{n : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$. Für zwei unterschiedliche Mengen A und B ist dann $A \cap B$ entweder leer oder enthält nur ein Element. Wir wählen ein σ -subadditives Maß durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & A = \mathbb{N} \\ n^{-2} & A = \{n\}. \end{cases}$$

Allerdings ist dann

$$P\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right) = \sum \frac{1}{n^2} \neq 1 = P(\mathbb{N})$$

und μ ist demnach nicht σ -additiv.

Ist \mathcal{H} ein Halbring, so nennen wir

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}) = \left\{ \sum_{i=1}^n A_i : A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H} \text{ p. d.}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

den von \mathcal{H} erzeugten Ring.

Lemma 1.13. Sei \mathcal{H} ein Halbring mit $\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ endlich und additiv. Auf $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ definieren wir

$$\tilde{\mu}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ p. d. Dann ist $\tilde{\mu}$ die einzige additive Fortsetzung auf \mathcal{R} die auf \mathcal{H} mit μ übereinstimmt. Außerdem gilt: $\tilde{\mu}$ σ -additiv $\Leftrightarrow \mu$ σ -additiv.

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass $\tilde{\mu}$ wohldefiniert ist. Seien dazu $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ zwei paarweise disjunkte Darstellungen der gleichen Menge, also $\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n B_j$. Dann folgt

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{j=1}^n A_i \cap B_j, \\ B_j &= \sum_{i=1}^m B_j \cap A_i, \\ \sum_{i=1}^m \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^n \mu(B_j) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$

- **stetig von unten**, falls $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$ für $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, $A_i \in \mathcal{M}$ für alle $i \geq 1$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$
- mit $\mu(A_1) < \infty$ **stetig von oben**, falls $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$ für $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, mit $A_i \in \mathcal{M}$
- mit $\mu(A_1) < \infty$ **stetig von oben in \emptyset** , falls die obige Eigenschaft $\forall \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ gilt.

Satz 1.14. Sei \mathcal{R} ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ additiv und $\mu(\emptyset) = 0$,

(i) μ ist σ -additiv

(ii) μ ist σ -subadditiv

(iii) μ ist stetig von unten

(iv) μ ist stetig von oben in \emptyset

(v) μ ist stetig von oben

Dann gilt: (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) und (iv) \Rightarrow (iii) falls $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{R}$.

Beweis:

(i) \Rightarrow (ii): Lemma 1.9

(ii) \Rightarrow (i): Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$, p. d. so dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \stackrel{\mu \text{ monoton}}{\leq} \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \stackrel{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(i) \Rightarrow (iii): Seien $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \in \mathcal{R}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Dann ist

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(iii) \Rightarrow (i): Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ p. d. und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Dann ist $(\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{R})_{n \geq 1}$ monoton wachsend, und

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(iii) \Rightarrow (iv): (Übergang zu Komplementen) Seien $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \in \mathcal{R}$ mit $\bigcap A_i = \emptyset$ und $B_n = A_1 \setminus A_n$. Dann ist $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ und $\bigcup B_i = A_1$ da $\bigcap A_i = \emptyset$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \mu(A_n) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n), \end{aligned}$$

so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ folgt. Hierbei haben wir $\mu(A_1) < \infty$ genutzt.

(iv) \Rightarrow (v): Seien $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq \in \mathcal{R}$ und $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Setze $B_n = A_n \setminus A$ und nutze (iv).

(v) \Rightarrow (iv): klar

(iv) \Rightarrow (iii): (mit μ endlich) Seien $A_1 \subset A_2 \subseteq \dots \in \mathcal{R}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Setze $B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A_n$, so dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, also

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_i). \quad \square$$

1.2 Die Fortsetzung von Maßen

In diesem Abschnitt wollen wir nun von einem Halbring auf eine σ -Algebra einen Inhalt geeignet zu einem Maß fortsetzen.

Satz 1.15 (Eindeutigkeit). *Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ durchschnittsstabil, es gebe $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$, mit $C_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \Omega$ und $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. Weiterhin seien $\mu, \nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Maße, so dass $\mu|_{\mathcal{C}}, \nu|_{\mathcal{C}}$ σ -finit sind.*

Dann ist

$$\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(C) = \nu(C) \quad \forall C \in \mathcal{C}.$$

Beweis:

„ \Rightarrow “ klar

„ \Leftarrow “ Sei $C \in \mathcal{C}$ mit $\mu(C) = \nu(C) < \infty$ und

$$\mathcal{D}_C := \{A \in \mathcal{F} : \mu(A \cap C) = \nu(A \cap C)\} \supseteq \mathcal{C}.$$

Dann ist \mathcal{D}_C Dynkin-System, denn:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}_C$,

(ii) $A, B \in \mathcal{D}_C$,

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu((B \setminus A) \cap C) = \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) = \nu(B \cap C) - \nu(A \cap C) = \nu((B \setminus A) \cap C), \quad \text{also } B \setminus A \in \mathcal{D}_C.$$

(iii) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \in \mathcal{D}_C$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}_C$, so folgt wegen der σ -Stetigkeit von μ, ν

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap C\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n \cap C) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Dann ist $\mathcal{F} = \sigma(C) = \mathcal{D}_C$, was ebenfalls für alle C_n gilt. Nun betrachten wir $A \in \mathcal{F}$. Dann ist $A \cap C_n \in \mathcal{D}_{C_n}$, also $\mu(A \cap C_n) = \nu(A \cap C_n)$. Wir erhalten

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap C_n) = \nu(A). \quad \square$$

Wir kommen zu den von C. Carathéodory (1873–1950) eingeführten, zentralen Begriff von einem äußeren Maß. Wie bereits erwähnt, wird lediglich die σ -Additivität durch die σ -Subadditivität ersetzt. In der folgenden Definition wird aber auch die Wortgebung äußeres Maß klar, vergleiche Satz 1.18. Alternativ wird für subadditive Mengenfunktionen (auf σ -Algebran) auch der Begriff Kapazität verwendet.

Definition 1.16. Eine Abbildung $\eta : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *äußeres Maß*, falls

- (i) $\eta(\emptyset) = 0$
- (ii) $A \subseteq B \subseteq \Omega \Rightarrow \eta(A) \leq \eta(B)$ (Monotonie)
- (iii) Für $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$\eta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta(A_i) \quad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

Ein äußeres Maß ist natürlich auch subadditiv. Da es auf allen Teilmengen von Ω definiert ist, gibt es zunächst keinen vernünftigen Begriff der Meßbarkeit.

Definition 1.17. Ist η ein äußeres Maß und $A \subseteq \Omega$, so heißt A *σ -messbar*, falls für alle $B \subseteq \Omega$

$$\eta(B) \geq \eta(B \cap A) + \eta(B \cap A^c).$$

Damit ist eine Menge A genau dann messbar, wenn sie **jede** Menge $B \subseteq \Omega$ zerlegt in die disjunkten Mengen $B \cap A$, $B \cap A^c$, auf denen sich η **additiv** verhält.

Satz 1.18. Sei \mathcal{H} ein Halbring und μ ein Inhalt auf \mathcal{H} . Setze für $A \subseteq \Omega$ ($\inf \emptyset = \infty$)

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{H}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}. \quad (1.19)$$

Dann ist μ^* äußeres Maß.

$$(1.19) \Leftrightarrow \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{H} \text{ p. d.}, A \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

Beweis. Offensichtlich ist μ^* monoton und $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

Seien $A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$. Ist $\mu(A_n) = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so sind wir fertig.

Sei also $\mu^*(A_n) < \infty \forall n$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es (Infimum!) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(B_{nk})_{k \geq 1} \subset \mathcal{H}$, so dass $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}.$$

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Nun ist $(B_{nk})_{n,k}$ eine abzählbare Familie von Mengen aus \mathcal{H} und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, ist μ^* äußeres Maß. □

Satz 1.20. Sei μ^* ein äußeres Maß. Dann ist

$$\mathcal{F}^* := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{ ist } \mu^* \text{-messbar}\}$$

eine σ -Algebra und $\mu^*|_{\mathcal{F}^*}$ ein Maß.

Beweis. (i): Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{F}^* eine Algebra ist.

$$\Omega \in \mathcal{F}^* \text{ und } A \in \mathcal{F}^* \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}^* \quad (\text{direkt aus Def. von } \mu^* \text{-messbar})$$

Seien $A, B \in \mathcal{F}^*$ und $C \subset \Omega$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu^*(C) &\geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \quad (A \in \mathcal{F}^*) \\ &\geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c \cap B) + \mu^*(C \cap A^c \cap B^c) \quad (B \in \mathcal{F}^*) \\ &\geq \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c) \end{aligned}$$

und somit sind $A \cup B \in \mathcal{F}^*$. Sind A, B auch noch paarweise disjunkt, so folgt

$$\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c). \quad (1.21)$$

(ii) Nun zeigen wir: Sind $(A_n)_{n \geq 1} A_i \in \mathcal{F}^*$ p. d. $\Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}^*$ und μ^* ist σ -additiv:

Zunächst folgt $\sum_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}^*$ aus (i). Für jedes $C \subseteq \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(C) &\geq \mu^* \left(C \cap \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) \right) + \mu^* \left(C \cap \left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^c \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(C \cap A_i) + \mu^*(C \cap A^c). \quad (\text{Monotonie \& (1.21)}) \end{aligned}$$

Dies gilt für alle n , also folgt

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(C \cap A_i) + \mu^*(C \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \geq \mu^*(C)\end{aligned}$$

wegen der Sub- σ -Additivität. Es folgt $A \in \mathcal{F}^*$ und mit $A = C$ die σ -Additivität von μ^* . \square

Theorem 1.22 (Fortsetzungssatz). Sei \mathcal{H} ein Halbring und $\mu : \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein Inhalt.

- (i) Dann sind alle Mengen aus \mathcal{H} μ^* -messbar.
- (ii) Ist μ σ -additiv, so gilt $\mu^*|_{\mathcal{H}} = \mu$.
- (iii) Ist μ nicht σ -additiv, so gibt es $A \in \mathcal{H}$, so dass $\mu^*(A) < \mu(A)$.

Insbesondere ist $\mu^*|_{\mathcal{F}^*}$ Maß und damit auch $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{H})}$.

Beweis. (i) Sei $A \in \mathcal{H}$ und $C \subseteq \Omega$ mit $\mu^*(C) < \infty$ (für $\mu^*(C) = \infty$ ist nicht zu zeigen) und $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ so, dass $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$ und $\mu^*(C) + \varepsilon \geq \sum \tilde{\mu}(B_n)$ (existiert, da $\mu^*(C) < \infty$).

Wir betrachten den auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ erzeugten Inhalt $\tilde{\mu}$.

$$\begin{aligned}\mu^*(C) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c).\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $A \in \mathcal{F}^*$.

- (ii) Sei $A \in \mathcal{H}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}$, so dass $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$ und (Def. μ^*)

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \stackrel{\sigma\text{-Sub-Add.}}{\geq} \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \geq \mu(A) \geq \mu^*(A)$$

und es folgt $\mu^*(A) = \mu(A)$.

- (iii) Ist μ nicht σ -additiv, so gibt es p. d. $(A_n) \subseteq \mathcal{H}$, $A = \sum_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{H}$ mit

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_n\right) \neq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Allerdings ist stets (μ Inhalt) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, also $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu(A)$. Nun ist $\mu^*(A_n) = \mu(A_n)$ und μ^* σ -additiv, also $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A) < \mu(A)$. \square

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Man kann noch zeigen, dass

$$\mathcal{F}^* = \{A \setminus N : A \in \sigma(\mathcal{H}), N \in \Omega, \mu^*(N) = 0\}.$$

1.3 Maße auf \mathbb{R}

Wir können nun das Lebesgue-Maß λ eindeutig auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definieren durch

$$\lambda((a, b]) = b - a, \quad a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a \leq b.$$

Wir setzen hierbei $(a, a] = \emptyset$. Ebenso erhalten wir eine Charakterisierung aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Satz 1.23. *Eine Funktion $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß genau dann, wenn es eine wachsende rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ gibt, so dass*

$$P((a, b]) = F(b) - F(a), \quad a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b.$$

Offensichtlich ist P eindeutig durch F bestimmt!

Beweis. „ \Rightarrow “: klar

„ \Leftarrow “: Wir zeigen, dass P eine σ -additive Mengenfunktion auf dem Erzeugenden-Halbring

$$\mathcal{H} = \{(a, b] : a \leq b, a, b \in \mathbb{Q}\} \text{ ist.}$$

Seien also $\{(a_i, b_i] : i \geq 1\}$ paarweise disjunkt (p. d.) und $\sum_{i \geq 1} (a_i, b_i] = (a, b]$. Ohne Einschränkung können wir umordnen in $\{(c_i, c_{i-1}]\}$ mit $\sum_{i \geq 1} (c_i, c_{i-1}] = (a, b]$ und $c_1 \geq c_2 \geq \dots$. Dann gilt $c_i \rightarrow a$ und $c_1 = b$. (!)

Da F rechtsstetig ist, folgt

$$\begin{aligned} P((a, b]) &= F(b) - F(a) = F(c_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(c_n) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} F(c_n) - F(c_{n-1}) = \sum_{n=2}^{\infty} P((c_n, c_{n-1}]). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Theorem 1.22. □

Für uns wichtig werden Verteilungen, also Bildmaße sein.

Definition 1.24. Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt *Maßraum*, falls \mathcal{F} σ -Algebra und μ Maß auf (Ω, \mathcal{F}) ist.

Das Paar (Ω, \mathcal{F}) bezeichnen wir als *messbaren Raum*.

Definition 1.25. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, \mathcal{F}' eine σ -Algebra auf Ω' . Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt *\mathcal{F} - \mathcal{F}' -messbar*, falls

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \text{ für alle } A \in \mathcal{F}'.$$

Für ein solches f heißt $f_*\mu : \mathcal{F}' \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{0\}$, definiert durch

$$f_*\mu(A') = \mu(f^{-1}(A')) = \mu(\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'), \quad A' \in \mathcal{F}'$$

Bildmaß von μ unter f .

Man zeigt leicht, dass $f_*\mu$ wieder ein Maß ist. $f_*\mu$ wird oft auch als $f_*(\mu)$, $\mu \circ f^{-1}$ notiert und *push-forward* genannt.

Die **von f erzeugte** σ -Algebra $f^{-1}(\mathcal{F}')$ ist in der Tat eine σ -Algebra. Ebenso gilt für $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{F}'$, dass

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')).$$

Ist $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so heißt f **reellwertig** und ist f \mathcal{F} - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar, so nennen wir f **Borel-messbar**, oder oft auch einfach messbar.

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Messbarkeit ist ein wichtiger Begriff, so dass wir ein paar Rechenregeln wiederholen. Wir schreiben $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Lemma 1.26. Seien (Ω, \mathcal{F}) , (Ω', \mathcal{F}') , $(\Omega'', \mathcal{F}'')$ Maßräume auf $f : \Omega \rightarrow \Omega'$; $g : \Omega' \rightarrow \Omega''$.

$$(i) \quad \mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C}') \Rightarrow f \text{ messbar} \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{F}$$

$$(ii) \quad f, g \text{ messbar} \Rightarrow f \circ g \text{ messbar}$$

(iii) stetige Abbildungen sind messbar (auf topologischen Räumen !) bzgl. der Borel- σ -Algebren.

(iv) Eine reellwertige Funktion f ist genau dann Borel-messbar, falls

$$\{\omega : f(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$(v) \quad f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ ist messbar} \Leftrightarrow A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}.$$

$$(vi) \quad f, g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ messbar} \Rightarrow f \cdot g, a \cdot f + b \cdot g, \frac{f}{g} \mathbb{1}_{\{g \neq 0\}} \text{ messbar} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(vii) $f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar $\Rightarrow \sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n$ sind messbar.

Den Beweis kann man als eine Übungsaufgabe führen. Am interessantesten ist wohl der Beweis für die Messbarkeit von $\sup_n f_n$:

$$\{\omega : \sup f_n(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n \geq 1} \{\omega : f_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

Eine wichtige Eigenschaft nicht-negativer, messbarer Funktionen ist, dass sie stets durch einfache Funktionen approximierbar sind: Wir setzen:

$$A_{j,n} = \begin{cases} \{\frac{j}{2^n} \leq f \leq \frac{j+1}{2^n}\}, & j = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{f \geq n\}, & j = n \cdot 2^n \end{cases}.$$

Mit

$$f_n = \sum_{j=0}^{n \cdot 2^n} \frac{j}{2^n} \mathbb{1}_{A_{j,n}}$$

erhalten wir die gewünschte, monotone Approximation, $f_n \uparrow f \geq 0$. Dies ist der Schlüssel zum Integral! Wir definieren für einfache Funktionen

$$\int f d\mu = \int \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$$

und für messbare, nicht-negative Funktionen und $f_n \uparrow f$

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu : g \text{ einfach und } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Dieses Integral können wir fortsetzen, falls mindestens ein Integral $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$ endlich ist. Dann definieren wir

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{Q}} : \int |f| d\mu < \infty \right\} \quad (\text{und analog } \mathcal{L}^p)$$

Leider hat dieser Raum schlechte Trennungseigenschaften: Gibt es eine nichtleere Null-Menge, so gibt es immer verschiedene meßbare Funktionen, die den Abstand Null haben. Um das zu beheben, und letzten Endes Banach-Räume zu erhalten, betrachtet man Äquivalenzklassen, siehe auch Abschnitt VI.2 in Elstrodt(2013). Auch im Buch Bauer(1990) gibt es ein kleines Kapitel über L^p -Räume.

Auf den messbaren Funktionen kann man folgende Äquivalenzrelation einführen: $f \sim g$ falls $\mu(f = g) = 1$. Die hierdurch erhaltenen Äquivalenzklassen definieren die L^p -Räume. In der Notation machen wir dies durch die Unterscheidung \mathcal{L} und L kenntlich. Im Folgenden kürzt f.ü. fast überall ab, etwa $f \leq g$ f.ü. ist gleichbedeutend mit $\mu(\omega \in \Omega : f > g) = 0$.

Satz 1.27. Seien f, g, f_1, f_2, \dots meßbar. Dann gilt:

- (i) $f \leq g$ f.ü. $\Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$
- (ii) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$ (Dreiecksungleichung)
- (iii) $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$ (Linearität)
- (iv) $f = 0$ f.ü. $\Rightarrow \int f d\mu = 0$
- (v) $\int f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty$ f.ü.

Als Übung beweisen wir den Substitutionssatz

Satz 1.28. $g \in \mathcal{L}^1(f_*\mu) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\int g \circ f d\mu = \int g d(f_*\mu).$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für einfache nicht-negative g zu zeigen. Der allgemeine Fall folgt durch Approximation.

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Sei $g = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i} \Rightarrow g \circ f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{\{f \in A_i\}}$, also

$$\int g \circ f d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(f \in A_i) = \sum_{i=1}^n c_i f_* \mu(A_i) = \int g d(f_* \mu). \quad \square$$

Äußerst wichtig sind die folgenden Konvergenzsätze.

Theorem 1.29 (Monotone Konvergenz). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Maßraum, $f_n \geq 0$ und $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \uparrow f$ f. ü. \Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Folgt direkt aus der monotonen Konvergenz (Teil (vi) in 1.27) mit

$$g_n = (f - f_n) \mathbb{1}_{\{\omega \in \Omega: f_n(\omega) \uparrow f(\omega)\}}. \quad \square$$

Bemerkung 1.30. Auf die Forderung $f \geq 0$ kann nicht verzichtet werden. Betrachten wir das Lebesgue-Maß und die Funktionenfolge

$$f_n(x) = -\mathbb{1}_{\{x \leq -n\}},$$

so konvergiert $f_n \uparrow f = 0$ monoton, aber $\int f_n d\mu = -\infty$ und $\int f d\mu = 0$.

Theorem 1.31 (Fatou). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Maßraum $f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \geq 0$. Dann gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Beweis. Ist n fest, so gilt für alle $j \geq n$, dass $f_j \geq \inf_{k \geq n} f_k$. Wegen der Monotonie des Integrals erhält man, dass

$$\inf_{j \geq n} \int f_j d\mu \geq \int \inf_{k \geq n} f_k d\mu.$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \inf_{k \geq n} f_k d\mu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

wegen monotoner Konvergenz $(\inf_{k \geq n} f_k \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)$. □

Theorem 1.32 (Majorisierte Konvergenz). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Maßraum und $f, g, (f_n)_{n \geq 1} : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Sei $|f_n| \leq g$ f. ü. mit $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Zunächst sei ohne Einschränkung $|f_n| \leq g \ \forall \omega \in \Omega$. Die Idee ist, Fatou auf $g + f$, $g - f$ anzuwenden, wobei $g + f_n \geq 0$ und $g - f_n \geq 0$ aus der Voraussetzung folgt. Es gilt, dass

$$(1) \quad \int (g + f) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g + f_n) d\mu = \int g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

$$(2) \quad \int (g - f) d\mu \leq \int g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu, \text{ indem wir Fatou auf } (g - f_n) \text{ anwenden.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir, dass

$$\int f d\mu \stackrel{(1)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \stackrel{(2)}{\leq} \int f d\mu. \quad \square$$

Wir erinnern kurz an die $L^p(\mu)$ -Räume

$\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar mit } \|f\|_p < \infty\}$ und

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{K : \mu(|f| > K) = 0\}.$$

Es gilt für messbare f, g , dass

$$(i) \quad 0 < p, q, r \leq \infty \text{ und } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}: \quad \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \text{ (Hölder-Ungleichung)}$$

$$(ii) \quad 1 \leq p \leq \infty: \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \text{ (Minkowski-Ungleichung)}$$

Definition 1.33 (Konvergenz im p -ten Mittel). Eine Folge $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ **konvergiert im p -ten Mittel**, falls

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wir schreiben

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} f.$$

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Konvergiert eine Folge im p -ten Mittel, so auch im q -ten Mittel, falls $q < p$. (Hölder)
Außerdem ist $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p \geq 1$ **vollständig** (jede Cauchy-Folge konvergiert); das ist der berühmte Satz von Riesz-Fischer, siehe etwa Satz VI.2.5 in Elstrodt(2013). Allerdings ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ kein (!) normierter Raum, denn $N_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ ist lediglich eine Halbnorm. Dies können wir, wie bereits erwähnt, beheben durch Übergang zu Äquivalenzklassen: $L^p(\mu)$ ist ein normierter und vollständiger Raum, und damit ein Banach-Raum.

1.4 Hilberträume

Auf dem $\mathcal{L}^2(\mu)$ hat man eine besondere Struktur, denn dieser Raum ist sogar ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int f g d\mu.$$

Dann lassen sich die allgemeinen Resultate anwenden (siehe Werner(2000)).

Lemma 1.34 (Parallelogrammidentität). *Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Hilbertraum falls $\forall f, g$ gilt, dass*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Beweis. Siehe Werner(2000), Satz V.1.6. □

Satz 1.35. *Sei M ein abgeschlossener, linearer Unterraum des Hilbertraums H und $f \in H$. Dann gibt es genau ein $g \in M$, $h \perp M$, so dass*

$$f = g + h.$$

Beweis. Siehe Werner(2000), Theorem V.3.4. □

Satz 1.36 (Riesz-Fréchet). *Sei H ein Hilbertraum und $F : H \rightarrow \mathbb{R}$. F ist genau dann stetig und linear, falls es ein $f \in H$ gibt, so dass*

$$F(h) = \langle f, h \rangle \quad \forall h \in H.$$

Hierbei ist f eindeutig.

Beweis. Siehe Werner(2000), V.3.6. □

1.5 Signierte Maße und der Satz von Radon-Nikodým

Wir wenden uns kurz diesem allgemeineren Begriff zu. Vorstellen kann man sich ein signiertes Maß als Ladungsverteilung mit positiver und negativer Ladung. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein fester messbarer Raum.

Definition 1.37. Eine Abbildung $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *signiertes Maß*, falls

- (i) $\nu(\emptyset) = 0$
- (ii) $\nu(\mathcal{F}) = \{\nu(F) : F \in \mathcal{F}\}$ ist entweder Teilmenge von $(-\infty, +\infty]$ oder von $[-\infty, \infty)$.
- (iii) Sind $(A_n) \in \mathcal{F}$ p. d., so gilt

$$\nu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Beispiel 1.38. Hat man Maße μ_1, μ_2 , wobei eines davon endlich ist, so ist $\nu = \mu_1 - \mu_2$ signiertes Maß. In der Tat hat jedes signierte Maß eine solche Gestalt und μ_1, μ_2 sind bei geeigneter „minimaler“ Wahl sogar eindeutig.

Definition 1.39. Ist ν signiertes Maß und $F \in \mathcal{F}$.

- (i) F heißt *ν -positiv*, falls $\nu(A) \geq 0$ für alle $\mathcal{F} \ni A \subseteq F$
- (ii) F heißt *ν -negativ*, falls $\nu(A) \leq 0$ für alle $\mathcal{F} \ni A \subseteq F$
- (iii) F heißt *ν -Nullmenge*, falls $\nu(A) = 0$ für alle $\mathcal{F} \ni A \subseteq F$

Lemma 1.40. Ist $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty)$ signiertes Maß und $A \in \mathcal{F}$ mit $\nu(A) \neq -\infty \Rightarrow$ es existiert eine positive Menge P mit $\nu(P) \geq \nu(A)$.

Beweis. (i) Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\mathcal{F} \ni A_\varepsilon \subseteq A$ mit $\nu(A_\varepsilon) \geq \nu(A)$ und $\nu(B) \geq -\varepsilon$ für alle $\mathcal{F} \ni B \subseteq A_\varepsilon$.

Durch Widerspruch: Angenommen, es existiert $\varepsilon > 0$, so dass die Behauptung falsch ist. Dann enthält jede messbare Menge $C \subseteq A$ mit $\nu(C) \geq \nu(A)$ ein $B \in \mathcal{F}$, so dass $\nu(B) \leq -\varepsilon$. Wir erhalten eine Folge $B_1 \subseteq A, B_k \subseteq A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1})$ mit $\nu(B_k) \leq -\varepsilon, k \geq 1 \Rightarrow \nu(\sum B_k) = -\infty$. ✘

Wir erhalten eine fallende Folge $(A_{1/n}) \subseteq \mathcal{F}$ und $P := \bigcap A_{1/n}$ ist positiv sowie $\nu(A_{1/n}) \geq \nu(A)$, also auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_{1/n}) = \nu(P)$. □

Satz 1.41 (Hahn-Zerlegung). *Zu jedem signierten Maß ν existiert eine disjunkte Zerlegung $\Omega = P + N$, in eine ν -positive Menge $P \in \mathcal{F}$ und eine ν -negative Menge $N \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\nu(\mathcal{F}) \subseteq [-\infty, \infty)$ und $\alpha = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{F}\}$. Nach Lemma 1.4 gibt es eine Folge positiver Mengen (A_n) mit $\nu(A_n) \rightarrow \alpha$. Dann ist $P = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ positiv und $\nu(P) \geq \nu(A_n)$, also $\nu(P) = \alpha$. Außerdem ist nach Voraussetzung $\nu(P) < \infty$ und somit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nun ist $N = P^c$ negativ: Gäbe es $B \subset N$ mit $\nu(B) > 0$, so wäre $\nu(P \cup B) > \alpha$. □

Man sieht leicht, dass diese Zerlegung **eindeutig** bis auf Nullmengen ist.

Für ein signiertes Maß ν mit Hahn-Zerlegung $\Omega = P + N$ heißen

$$\left. \begin{aligned} \nu^+(A) &:= \nu(A \cap P) \\ \nu^-(A) &:= \nu(A \cap N) \end{aligned} \right\}, \quad A \in \mathcal{F}$$

positive (negative) Variation von ν . Da P und N bis auf Nullmengen eindeutig sind, ist $\nu^{+/-}$ wohldefiniert.

Definition 1.42. Zwei signierte Maße μ, ν heißen *singulär* (und wir schreiben $\mu \perp \nu$), falls $\Omega = A + A^c$, $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) = 0$, $\nu(A^c) = 0$.

Satz 1.43 (Jordan-Zerlegung). *Jedes signierte Maß ν erfüllt $\nu = \nu^+ + \nu^-$ mit $\nu^+ \perp \nu^-$. Diese Zerlegung ist minimal, d.h.: ist $\nu = \varrho - \sigma$ mit Maßen ϱ, σ , von denen mindestens eines endlich ist, so ist $\nu^+ \leq \varrho$, $\nu^- \leq \sigma$.*

Beweis. Es bleibt lediglich die Minimalität:

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P) = \varrho(A \cap P) - \sigma(A \cap P) \leq \varrho(A \cap P) \leq \varrho(A). \quad \square$$

Beispiel 1.44. Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ quasi-integrierbar. Dann ist durch

$$d\mu = f dx$$

ein signiertes Maß definiert und $P = f^{-1}([0, \infty])$, $N = f^{-1}([-\infty, 0))$.

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Definition 1.45. Wieder betrachten wir den festen meßbaren Raum (Ω, \mathcal{F}) .

(i) Das (signierte) Maß ν heißt *absolut stetig* bzgl. des Maßes μ , falls

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}.$$

Dann schreiben wir $\nu \ll \mu$. Gilt zusätzlich $\mu \ll \nu$, so heißen μ und ν *äquivalent* und wir schreiben $\mu \sim \nu$.

(ii) Gilt

$$\nu(A) = \int_A f d\mu,$$

für alle $A \in \mathcal{F}$, so heißt f *Dichte* von ν bzgl. μ und wir schreiben

$$\frac{d\nu}{d\mu} = f \quad \text{oder} \quad d\nu = f d\mu.$$

Der Schlüssel zu dem Satz von Radon-Nikodým ist folgendes Lemma:

Lemma 1.46. *Sind ν, ϱ endliche Maße mit $\nu \leq \varrho$, so gibt es seine messbare Funktion $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$ mit*

$$d\nu = h d\varrho. \tag{1.47}$$

Beweis. Die Voraussetzungen ergeben, dass $L^2(\varrho) \subseteq L^2(\nu) \subseteq L^1(\nu)$. Damit ist die Abbildung $f \mapsto \int_{\Omega} f d\nu$, mit $f \in L^2(\varrho)$ wohldefiniert und stetig (da L^2 vollständig ist). Außerdem ist $L^2(\varrho)$ ein Hilbertraum. Nach Satz 1.36 von Riesz-Fréchet gibt es $h \in L^2(\varrho)$, so dass

$$\int f d\nu = \langle f, h \rangle_{\varrho} = \int f h d\varrho.$$

Dies gilt für alle $f \in L^2(\varrho)$, insbesondere für $f = 1_F$, $F \in \mathcal{F}$. Man sieht direkt, dass $h(\Omega) \in [0, 1]$ ϱ -f.s. □

Wir sammeln einige technische Eigenschaften

Lemma 1.48. Sei μ ein Maß auf (Ω, \mathcal{F}) und $f, g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar.

(i) Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und gilt

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu, \quad A \in \mathcal{F}, \quad (1.49)$$

so folgt $f \leq g$ μ -fast sicher.

(ii) Ist ν σ -finit und $d\nu = f d\mu = g d\mu$, so folgt

$$f = g \quad \mu\text{-f.s.}$$

(iii) Ist μ σ -finit und sind f, g quasi-integrierbar mit $d\nu = f d\mu = g d\mu$, so folgt

$$f = g \quad \mu\text{-f.s.}$$

(iv) Seien $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt

$$\int g \cdot (f d\mu) = \int (f \cdot g) d\mu.$$

Beweis. (i) Wir setzen $A_n = \{f > g + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$, so dass $A_n \uparrow A = \{f > g\} \in \mathcal{F}$. Wir erhalten, dass

$$\int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \left(g + \frac{1}{n}\right) d\mu = \int_{A_n} g d\mu + \frac{1}{n} \mu(A_n) \geq \int_{A_n} f d\mu + \frac{1}{n} \mu(A_n),$$

also $\mu(A_n) = 0$ (da $\int f d\mu < \infty$). Da aber $A_n \uparrow A$, folgt auch $\mu(A) = 0$. Gilt in (1.49) sogar Gleichheit, so erhalten wir damit auch $f = g$ μ -fast sicher.

(ii) Da ν σ -finit ist, gibt es $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$, so dass $\bigcup_{n \geq 1} \Omega_n = \Omega$ und $\nu(\Omega_n) < \infty$.

Wir setzen $A_n = \Omega_n \cap \{f < g\} \Rightarrow \int_{A_n} (f - g) d\mu = \nu(A_n) - \nu(A_n) = 0$, also $\mu(A_n) = 0$.

Damit ist

$$\mu(f > g) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0.$$

(iii) Wir zeigen die Behauptung für \leq - das Resultat folgt durch Vertauschung von f und g . Aus Symmetriegründen können wir f^- integrierbar annehmen. Dann ist auch g^- integrierbar. Sei (Ω_n) eine Folge wachsender, messbarer Mengen mit $\mu(\Omega_n) < \infty$ und $\Omega_n \rightarrow \Omega$. Wir setzen

$$A_n = \Omega_n \cap \{g \leq n\} \uparrow \{g < \infty\} =: A.$$

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Dann ist $\mu(A_n) < \infty$ und $g\mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Für alle $F \in \mathcal{F}$ folgt, dass

$$-\infty < \int_F f \mathbb{1}_{A_n} d\mu \leq \int_F g \mathbb{1}_{A_n} d\mu < \infty.$$

Mit $F = \Omega$ erhalten wir, dass auch $f\mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist. Nach Teil (i) folgt, dass $f\mathbb{1}_{A_n} \leq g\mathbb{1}_{A_n}$ μ -fast sicher (und zwar für alle n).

Mit $n \rightarrow \infty$ folgt, dass $f\mathbb{1}_{\{g < \infty\}} \leq g\mathbb{1}_{\{g < \infty\}}$ μ -fast sicher. Auf der Menge $A^c\{g = \infty\}$ gilt das natürlich auch und die Behauptung folgt.

(iv) Offensichtlich ist für $g = 1_A$

$$\int g(f \cdot d\mu) = \int_A f d\mu = \int (1_A \cdot f) d\mu.$$

Die übliche Approximation von messbaren g liefert das Resultat. □

Beispiel 1.50. Natürlich kennen wir bereits Dichten bzgl. des Lebesgue-Maßes (Normalverteilungen etc.). Jede diskrete Verteilung hat allerdings auch eine Dichte bezüglich des Zählmaßes

$$\mu = \sum_{n \geq 1} \delta_{x_n}$$

mit dem Dirac-Maß $\delta_{x_n}(A) := \mathbb{1}_A(x_n)$ und geeignet gewählten (x_n) .

Satz 1.51 (Radon-Nikodým). *Es sei μ σ -finites Maß und ν ein signiertes Maß, so dass $\nu \ll \mu$. Dann hat ν eine (μ -f.s.) eindeutige Dichte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ bzgl. μ .*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus (f, g quasi-i.b., μ σ -finit) Lemma 1.48. Mit der Jordan-Zerlegung ist $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+ \ll \mu$ und $\nu^- \ll \mu$, so dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass ν ein Maß ist.

(1) μ, ν endlich \Rightarrow

Wir betrachten $\tau = \mu + \nu$. Nach Lemma 1.46 existieren h, g so dass $d\mu = g d\tau$ und $d\nu = h d\tau$. Wir setzen $N = \{g = 0\}$, so dass $\mu(N) = 0$, also auch $\nu(N) = 0$, da $\nu \ll \mu$.

Definiere

$$f(x) := \frac{h(x)}{g(x)} \mathbb{1}_{\{x \in N\}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \nu(A) &= \nu(A \cap N^c) = \int_{A \cap N^c} h d\tau \\ &= \int_{A \cap N^c} f d\mu = \int_A f d\mu \end{aligned}$$

(2) μ endlich \Rightarrow Setze

$$\alpha = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}, \nu(B) < \infty\} \quad (< \infty).$$

Dann gibt es $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ mit $\nu(B_n) < \infty, \mu(B_n) \rightarrow \alpha$, also $\mu(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = \alpha$.

Für $A \in \mathcal{F}, A \subseteq (\bigcup B_n)^c, \nu(A) < \infty$ gilt

$$\alpha + \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n \cup A) \leq \alpha,$$

also $\mu(A) = 0$ und somit $\nu(A) = 0$.

Wir erhalten $A \subseteq (\bigcup B_n)^c \Rightarrow \mu(A) = \nu(A) = 0$ oder $\mu(A) > 0, \nu(A) = \infty$.

Es ist $E_n := B_n \setminus B_{n-1}, E_1 = B_1, E := \bigcup E_n$ eine Folge p. d. Mengen mit $\nu(E_n) < \infty \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \exists f_n$ mit $d(\mathbf{1}_{E_n} \nu) = f_n d\mu$

$$\begin{aligned} \nu &= \left(\sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{E_n} + \mathbf{1}_{E^c} \right) \cdot \nu \\ &= \sum_{n \geq 1} f_n d\mu + \infty \cdot \mathbf{1}_{E^c} d\mu = \left(\sum_{n \geq 1} f_n + \infty \cdot \mathbf{1}_{E^c} \right) d\mu \end{aligned}$$

(3) μ σ -finit

\Rightarrow Es existieren p. d. $(\Omega_n), \mu(\Omega_n) < \infty$, so dass $\Omega = \sum_{n \geq 1} \Omega_n$.

Wir definieren $d\mu_n = \mathbf{1}_{\Omega_n} d\mu, \nu_n = \mathbf{1}_{\Omega_n} d\nu$

und wenden (2) an $\Rightarrow d\nu_n = f_n d\mu_n$ und $\sum f_n \mathbf{1}_{A_n}$ ist Dichte von ν bzgl. μ . \square

Beispiel 1.52. Auf σ -Finitheit kann nicht verzichtet werden: $\Omega \neq \emptyset, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}, \mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = \infty, \nu(\emptyset) = 0, \nu(\Omega) = \mathbf{1}$, so ist $\nu \ll \mu$, aber es gibt keine Dichte ($c \cdot \infty \neq \mathbf{1}$).

Satz 1.53 (Lebesgue-Zerlegung). *Ist μ σ -finites Maß und ν σ -finites, signiertes Maß, so gibt es genau eine Zerlegung*

$$\nu = \varrho + \sigma$$

mit signierten Maßen ϱ, ν , so dass $\varrho \ll \mu, \sigma \perp \mu$.

Beweis. Wieder genügt es nach Satz 1.43, Maße zu betrachten.

Wir setzen $\tau = \mu + \nu \stackrel{\text{Satz 1.51}}{\Rightarrow} \exists g$ so dass $d\mu = g d\tau$.

Definiere $N = \{g = 0\}$ und

$$\varrho(A) = \nu(A \cap N^c), \quad \sigma(A) = \nu(A \cap N), \quad A \in \mathcal{F}. \quad \square$$

Eindeutigkeit: ÜA

1.6 Produkträume

Die grundlegende Idee dieses Kapitels ist es auf dem Raum $\Omega_1 \times \Omega_2$ ein Maß einzuführen - zunächst werden wir zeigen, dass Mengen vom Typ $A_1 \times A_2$ auf diesem Raum eine σ -Algebra erzeugen und sich darauf ein Maß konstruieren lässt, was die Masse $\mu(A_1) \cdot \mu(A_2)$ vergibt.

Für uns interessant werden polnische Räume sein, da auf ihnen die zentralen Grenzwertsätze der Stochastik gelten werden.³

Definition 1.54. Ein topologischer Raum (Ω, \mathcal{O}) heißt **polnisch**, falls

- (i) es eine abzählbare Menge $\Omega' \subseteq \Omega$ gibt, so dass $\overline{\Omega'} = \Omega$,
- (ii) er vollständig metrisierbar ist.⁴

Beispiel 1.55. (i) $(\mathcal{C}[0, 1], \text{sup})$ ist polnisch,

(ii) $(\mathcal{C}[0, \infty), d)$ mit

$$d(f, g) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(f, g)}{1 + d_k(f, g)} \quad \text{mit } d_k = \sup_{[0, k]} |f - g|$$

ist polnisch (Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta) und

(iii) jeder **kompakte** metrische Raum ist polnisch.

Für eine Familie $(\Omega_i)_{i \in I}$ von Mengen heißt

$$\prod_{i \in I} \Omega_i := \{(\omega_i)_{i \in I} : \omega_i \in \Omega_i\}$$

Produktraum der $(\Omega_i)_{i \in J}$. Für $H \subseteq J \subseteq I$ definieren wir die **Projektionen**

$$\pi_H^J : \prod_{j \in J} \Omega_j \rightarrow \prod_{h \in H} \Omega_h \quad \text{durch}$$

$$\pi_H^J((\omega_j)_{j \in J}) = (\omega_h)_{h \in H}.$$

Außerdem schreiben wir $\pi_H^I = \pi_H$ und $\pi_i = \pi_{\{i\}}$, $i \in I$.

³Für einen topologischen Raum (Ω, \mathcal{O}) mit $A \subseteq \Omega$ setzen wir

$$A^\circ := \bigcup \{O \subseteq A : O \in \mathcal{O}\} \quad (\text{Innere von } A)$$

$$\bar{A} := \bigcap \{F \supseteq A : F^c \in \mathcal{O}\} \quad (\text{Abschluss von } A)$$

Definition 1.56. Ist $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, so heißt die von

$$\left\{ \prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \in I \setminus J} \Omega_i : J \subseteq I, J \text{ endlich} \right\}$$

erzeugte Topologie *Produkttopologie* auf $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$.

Bezüglich der Produkttopologie \mathcal{O} sind alle Projektionen $\pi_i, i \in J$ stetig:

$$\pi_i^{-1}(A_i) = A_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_j \in \mathcal{O}, \quad A_i \in \mathcal{O}_i.$$

Besonders schöne Eigenschaften erhält man unter Abzählbarkeit.

Satz 1.57. Sei $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie polnischer Räume. Dann ist der Produktraum versehen mit der Produkttopologie wieder polnisch.

Beweis. Da Ω_i separabel ist, gibt es abzählbare viele $\Omega'_i = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \subseteq \Omega_i$, so dass $\overline{\Omega'_i} = \Omega_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit d_i bezeichnen wir die vollständige Metrik, die \mathcal{O}_i erzeugt. Für $\omega, \omega' \in \Omega = \prod_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ wird durch

$$d(\omega, \omega') = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{2^i} (d_i(\omega_i, \omega'_i) \wedge 1)$$

eine vollständige Metrik auf Ω definiert, die die Produkt-Topologie \mathcal{O} erzeugt.

Für $\omega' \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \Omega'_i$ ist

$$B_{\omega'} := \left\{ \omega \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \Omega'_i : \omega_i \neq \omega'_i \text{ für endlich viele } i \in \mathbb{N} \right\}$$

abzählbar und dicht in Ω und die Behauptung folgt. \square

Definition 1.58. Für eine Familie $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)_{i \in I}$ von Maßräumen heißt die σ -Algebra

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i := \sigma \left(\left\{ \prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \in I \setminus J} \Omega_i : J \subseteq I, I \text{ endlich}, A_i \in \mathcal{F}_i \right\} \right)$$

die Produkt- σ -Algebra auf $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$. Ist $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_j$, so schreiben wir auch $\mathcal{F}^I = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}$.

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Wieder sind die Projektionen verträglich mit der Konstruktion: Da

$$\pi_i^{-1}(A_i) = A_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_j \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i,$$

ist π_i messbar bzgl. $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Außerdem ist

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sigma\left(\left\{A_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_j : A_i \in \mathcal{F}_i, i \in I\right\}\right).$$

Unter geeigneten Voraussetzungen ist die Borel- σ -Algebra der Produkttopologie gleich der Produkt- σ -Algebren der einzelnen Borel- σ -Algebren. Abzählbarkeit ist eine solche (vgl. Elstrodt, Kapitel III.5).

Lemma 1.59. *Ist I abzählbar und $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)$ polnisch für jedes $i \in I$, so gilt*

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(\Omega_i).$$

Insbesondere gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Wir nutzen folgendes, einfaches topologisches Resultat: Ist (Ω, \mathcal{O}) separabel, so hat \mathcal{O} eine abzählbare Basis \mathcal{B} , d.h.

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B}, i \in I, I \text{ beliebig} \right\}$$

Da alle $(\Omega_i, \mathcal{O}_i), i \in I$, separabel sind, haben sie jeweils abzählbare Basen \mathcal{B}_i . Dann ist

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \in I \setminus J} \Omega_i : J \subseteq I, J \text{ endlich}, A_i \in \mathcal{B}_i \right\}$$

eine abzählbare Basis von (Ω, \mathcal{O}) . Dann ist $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\Omega)$ (siehe das folgende Lemma).

Außerdem ist $\mathcal{B} \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(\Omega_i)$, also $\mathcal{B}(\Omega) \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(\Omega_i)$.

Umgekehrt ist für $A_i \in \mathcal{F}_i$

$$\begin{aligned} A_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_j &\in \sigma\left(\left\{A_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_j : A_i \in \mathcal{O}_i\right\}\right) \\ &\subseteq \mathcal{B}(\Omega). \end{aligned}$$

□

Man erhält leicht folgendes Resultat über erzeugende Halbringe:

Lemma 1.60. (i) Sei I endlich, \mathcal{H}_i Halbringe mit $\sigma(\mathcal{H}_i) = \mathcal{F}_i$. Dann ist

$$\mathcal{H} := \left\{ \prod_{i \in I} A_i : A_i \in \mathcal{H}_i, i \in I \right\}$$

ein Halbring mit $\sigma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

(ii) Sei I beliebig, \mathcal{H}_i durchschnittstabil und $\sigma(\mathcal{H}_i) = \mathcal{F}_i$. Dann ist

$$\mathcal{H} := \left\{ \prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \in I \setminus J} \Omega_i : J \subseteq I, J \text{ endlich}, A_j \in \mathcal{H}_j, j \in J \right\}$$

durchschnittstabil mit $\sigma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

1.7 Der Satz von Fubini

Ein wichtiges Hilfsmittel für Maße auf Produkträumen sind **Übergangskerne**, falls

Definition 1.61. Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ Messräume.

Eine Abbildung $\kappa : \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Übergangskern*, falls

- (i) für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ ist $\kappa(\omega_1, \cdot)$ ein Maß auf $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$
- (ii) für alle $A_2 \in \mathcal{F}_2$ ist $\kappa(\cdot, A_2)$ \mathcal{F}_1 -messbar.

Ein Übergangskern heißt *σ -finit*, falls es $A_1, A_2, \dots \uparrow \Omega_2$ gibt mit $\sup_{\Omega_1} \kappa(\omega_1, A_n) < \infty$ für alle $n = 1, 2, \dots$

Er heißt *stochastischer Kern* oder *Markovscher Kern*, falls

$$\kappa(\omega_1, \Omega_2) = 1 \quad \text{für alle } \omega_1 \in \Omega_1.$$

Beispiel 1.62 (Markov-Kette).

Sei $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ mit Wahrscheinlichkeiten $(p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, so dass mit $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \forall i$. Dann ist

$$\kappa(\omega_i, \cdot) := \sum_{j=1}^n p_{ij} \delta_{\omega_j}$$

ein stochastischer Kern von $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ nach $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Die (p_{ij}) bilden die Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen **Markov-Kette**.

Lemma 1.63 (Messbarkeit integrierbarer Schritte). Sei κ ein σ -finites Übergangskern und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -messbar. Dann ist

$$\omega_1 \mapsto \int f(\omega_1, \omega_2) \kappa(\omega_1, d\omega_2)$$

\mathcal{F}_1 -messbar.

Beweis (Skizze). Zunächst nehmen wir $\kappa(\omega_1, \Omega_2) < \infty$ an. (Dann Erweiterung mittels $A_1, A_2 \uparrow \Omega_2$.) Wir betrachten

$$\mathcal{D} = \left\{ A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 : \omega_1 \mapsto \int \mathbf{1}_A(\omega_2) \kappa(\omega_1, d\omega_2) \text{ ist } \mathcal{F}_1\text{-messbar} \right\}$$

Dies ist ein durchschnittstabiles Dynkin-System mit $\mathcal{H} = \{A_1 \times A_2, A_i \in \mathcal{F}_i\} \subseteq \mathcal{D}$. Nun gilt $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, also $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ und die Aussage folgt für $f = \mathbf{1}_A, A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Wir erhalten die Aussage für Treppenfunktionen und mit monotoner Konvergenz für alle messbaren $f \geq 0$. \square

Theorem 1.64 (Ionescu-Tulcea). Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 0, \dots, n$ Messräume, μ ein σ -finites Maß auf $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ und κ_i σ -finite Übergangskerne von $(\prod_{j=0}^{i-1} \Omega_j, \bigotimes_{j=0}^{i-1} \mathcal{F}_j)$ nach $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Dann gibt es genau ein σ -finites Maß $\kappa = \mu \bigotimes_{i=1}^n \kappa_i$ auf $(\prod_{j=0}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=0}^n \mathcal{F}_j)$, so dass

$$\kappa(A_0 \times \dots \times A_n) = \int_{A_0} \dots \int_{A_n} \kappa_n(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}, d\omega_n) \dots \kappa_1(\omega_0, d\omega_1) \mu(d\omega_0). \quad (1.65)$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage für $n = 1$, der allgemeine Fall folgt dann per Induktion. Der Beweis ist eine typische Anwendung des Maßfortsetzungssatzes: Wir starten mit dem durchschnittstabilen Halbring

$$\mathcal{H} = \left\{ \prod_{i=0}^n A_i : A_i \in \mathcal{F}_i \right\}$$

und betrachten die durch (1.65) definierte Mengenfunktion κ auf \mathcal{H} .

- (i) κ ist σ -finit: Seien $(\Omega_n^i) \subseteq \mathcal{F}_i$ so dass $(\Omega_n^i) \uparrow \Omega^i$, $i = 0, 1$ und $\mu(\Omega_n^0) < \infty$ und $\sup_{\omega^0 \in \Omega^0} \kappa_1(\omega_0, \Omega_n^1) =: C_n < \infty$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \kappa(\Omega_n^0 \times \Omega_n^1) &= \int_{\Omega_n^0} \int_{\Omega_n^1} \kappa(\omega^0, d\omega^1) \mu(d\omega^0) \\ &\leq C_n \mu(\Omega_n^1) < \infty. \end{aligned}$$

Da $\Omega_n^0 \times \Omega_n^1 \uparrow \Omega_0 \times \Omega_1$ ist κ σ -finit.

- (ii) κ ist σ -additiv: Für $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$ p. d. mit $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$ ist

$$\begin{aligned} \kappa(A) &= \int \int \mathbb{1}_A(\omega_0, \omega_1) \kappa_1(\omega_0, d\omega_1) \\ &= \int \sum_{n \geq 1} \int \mathbb{1}_{A_n}(\omega_0, \omega_1) \kappa_1(\omega_0, d\omega_1) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n \geq 1} \int \int \mathbb{1}_{A_n}(\omega_0, \omega_1) \kappa_1(\omega_0, d\omega_1) \mu(d\omega_0) \end{aligned}$$

wobei wir für (*) monotone Konvergenz nutzten. Mit dem Maßfortsetzungssatz erhalten wir die Behauptung. \square

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Bemerkung 1.66. Mit etwas mehr Aufwand kann man die Aussage auch für $n = \infty$ beweisen, siehe Bogachev(1991).

Theorem 1.67 (Satz von Fubini). Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, μ_0 , κ_i und $\kappa = \mu_0 \otimes_{i=1}^n \kappa_i$ wie in Theorem 1.64 gegeben und $f : \prod_{i=0}^n \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar bzgl. $\otimes_{i=0}^n \mathcal{F}_i$. Dann gilt

$$\int f d\kappa = \int \left(\cdots \left(\int f(\omega_0, \dots, \omega_n) \kappa_n(\omega_0, \dots, \omega_{n-1} d\omega_n) \right) \cdots \kappa_1(\omega_0, d\omega_1) \right) \mu(d\omega_0). \quad (1.68)$$

Die Aussage gilt auch für beliebig messbare \mathcal{F} mit $\int |f| d\kappa < \infty$.

Beweis. Die Messbarkeit der einzelnen Integrale folgt nach Lemma 1.63.

Für alle $A \in \otimes_{i=0}^n \mathcal{F}_i$ betrachten wir $A \mapsto \int_A d\kappa =: I(A)$. Zunächst gilt für $A \in \left\{ \prod_{i=0}^n A_i : A_i \in \mathcal{F}_i \right\}$, dass $I(A) = \kappa(A)$ und somit (1.68). Wegen der Linearität des Integrals und dem Satz der monotonen Konvergenz folgt (1.68) für alle nicht-negativen, messbaren Funktionen.

□

Die aus der Analysis bekannte Aussage für Produktmaße $\mu_0 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ erhält man als einfachen Spezialfall!

Beispiel 1.69 (Mehrdimensionales Lebesgue-Maß). Mit $\lambda_d = \otimes_{i=1}^d \lambda$ bezeichnen wir das Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^d

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \int f(x, y) dy = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \iint f(x, y) \lambda(dy) \lambda(dx) = \iint f(x, y) \lambda(dx) \lambda(dy) = 0.$$

Allerdings ist $|f|$ nicht bzgl. λ_2 integrierbar!

Aus Gleichheit und Endlichkeit der Mehrfachintegrale kann man also nicht auf die Integrierbarkeit des Integrand schließen.

Betrachten wir zwei unabhängige Zufallsvariable X und Y , so heißt die Verteilung von $X + Y$ die **Faltung**. Die führt zu folgendem Konzept.

Definition 1.70. Seien μ_1, \dots, μ_n σ -finite Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ deren Produktmaß und $S(x) = x_1 + \dots + x_n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$S_*\mu := \mu_1 * \dots * \mu_n$$

die *Faltung* der Maße μ_1, \dots, μ_n .

Übungsaufgabe 1.71. Haben die Maße μ_i Dichten f_i bzgl. λ_i , $i = 1, 2$ und setzt man

$$f_{\mu*\nu}(t) := \int f_\mu(s)f_\nu(t-s)\lambda(ds),$$

so gilt

$$\mu * \nu = f_{\mu*\nu} \cdot \lambda. \quad (\text{Fubini})$$

Betrachte $P(X + Y \leq x) = P(X \leq x - y)$!

Übungsaufgabe 1.72. Die Faltung zweier Normalverteilungen ist wieder normalverteilt.

1.8 Der Existenzsatz von Kolmogorov

Bisher haben wir endliche bzw. abzählbare Produkträume betrachtet, was für unsere Anwendungen nicht ausreichen wird. Der Satz von Kolmogorov erlaubt die Erweiterungen auf größere Räume, kommt allerdings nicht ohne die Voraussetzung aus, dass diese *polnisch* sind.

Als Beispiele können wir den unendlichen Würfelwurf betrachten und die Ergebnisse als eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auffassen. Oder wir betrachten einen Zählprozess $(N_t)_{t \geq 0}$ (das ist ein Prozess, der in Null startet und dann jeweils an einer zufälligen Zeit um 1 springt).

Beispiel 1.73. (i) $\mathbb{R}^d = \overline{\mathbb{Q}^d}$ ist separabel und vollständig

(ii) Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt $\Rightarrow (C(K), \text{sup}) = (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ist **polnisch** (Weierstraß'scher Approximationssatz – Polynome)

Wir erinnern daran, dass π_H^J die Projektion von J auf H bezeichnete.

Definition 1.74. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Maßraum und I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaße $P = (P_J : J \subseteq I, J \text{ endlich})$ heißt *projektive Familie*, falls P_J Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega^J, \mathcal{F}^J)$ und

$$P_H = \pi_H^J P_J$$

für alle $H \subseteq J \subseteq I$, J endlich.

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Beispiel 1.75. Betrachten wir etwa den Poisson-Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$: In diesem Fall gilt $P(N_t \in \{0, 1, 2, \dots\}) = 1$, N ist wachsend und

$$P(N_{t_j} = n_j, j \leq k) = \prod_{j=1}^k e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} \frac{\lambda(t_j - t_{j-1})^{n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!}.$$

Man erhält man eine projektive Familie durch die *endlich-dimensionalen Randverteilungen*

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(H) = P((N_{t_1}, \dots, N_{t_k}) \in H), \quad H \in \mathbb{R}^k.$$

Die bestimmen allerdings die Verteilung des Prozesses noch nicht vollständig! Konstruieren Sie einen Prozess N' mit den gleichen Randverteilungen als Übungsaufgabe.

Definition 1.76. Existiert für eine solche projektive Familie P ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_I auf $\mathcal{F}^I = \otimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ mit $P_J = \pi_J * P_I$ für alle $J \subseteq I$, J endlich, so heißt P_I *projektiver Limes* der Familie P . Wir schreiben

$$P_I = \varprojlim_{J \in I} P_J$$

mit der Konvention $J \in I = J \subseteq J$ und J endlich.

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

In diesem Abschnitt beginnen wir nun mit einer systematischen Entwicklung von Zufallsvariablen und Konvergenzen von Zufallsvariablen mit den dazugehörigen Hilfsmitteln. Dabei werden wir natürlich massiv von der im ersten Kapitel entwickelten Maßtheorie profitieren. Zentrale Resultate in diesem Abschnitt sind ein allgemeines starkes Gesetz der großen Zahl und ein allgemeiner zentraler Grenzwertsatz. Zunächst beginnen wir mit Grundlagen, die einige Resultate aus der Stochastik I wiederholen und in etwas allgemeinerer Form formulieren.

2.1 Grundlagen

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und einen Bildraum (Ω', \mathcal{F}') . Eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

heißt **Zufallsvariable**, falls sie \mathcal{F} – \mathcal{F}' -messbar ist. Wir schreiben

$$\begin{aligned} X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}, \\ \sigma(X) &= \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}'\} \end{aligned}$$

für das *Urbild* von X und die von X erzeugte σ -Algebra. Das Bildmaß

$$X_*P(B) = P(X^{-1}(B)) : \mathcal{F}' \rightarrow [0, 1]$$

heißt **Verteilung** von X . Haben X und Y die gleiche Verteilung (equality in law), so schreiben wir

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y.$$

Wir sagen, X hat die **Dichte** f bzgl. des Maßes ν , falls $X_*P = f \cdot \nu$, also

$$P(X \in A) = \int_A f d\nu, \quad A \in \mathcal{F}'.$$

Für eine messbare Zufallsvariable $X \geq 0$ definieren wir

$$E[X] = \int X dP$$

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

und im Falle der Quasi-integrierbarkeit den Erwartungswert als Summe der Integrale der Positiv- und Negativ-Teile.

Monotonie und Linearität des Integrals liefern für Zufallsvariable X, Y die Regeln

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y],$$

$$0 \leq X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y].$$

Eine Zufallsvariable ist meßbar bezüglich der von X erzeugten Filtration, wenn sie als meßbare Funktion von X geschrieben werden kann. Das die Umkehrung überraschenderweise auch gilt zeigt folgendes Lemma.

Lemma 2.1. *Sei $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Zufallsvariable. $Z : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\sigma(X)$ -messbar, falls*

$$Z = f(X)$$

mit $f : \Omega' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}' - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar.

Beweis. „ \Leftarrow “ klar.

„ \Rightarrow “ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $Z \geq 0$. (Ansonsten betrachte $Z = Z^+ - Z^-$.) Der Beweis benutzt die Approximation von Z durch Elementarfunktionen und geht in drei Schritten:

(i) Sei $Z = \mathbf{1}_A$, $A \in \sigma(X)$. Dann existiert $A' \in \mathcal{F}'$ mit $X^{-1}(A') = A$, also

$$Z = \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{X^{-1}(A')} = \mathbf{1}_{A'} \circ X \Rightarrow f = \mathbf{1}_{A'}.$$

(ii) Mit Linearität erhalten wir die Aussage für einfache $Z = \sum c_i \mathbf{1}_{A_i}$.

(iii) Ist $Z \geq 0$ messbar, so gibt es einfache $(Z^n)_{n \geq 1} \uparrow Z$ und $Z_n = f_n \circ X \Rightarrow$

$$\left(\sup_n f_n\right) \circ X = \sup_n f_n \circ X = \sup_n Z_n = Z$$

und mit $f = \sup f_n$ sind wir fertig, denn nach Lemma 1.26 ist $\sup f_n$ meßbar. \square

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

Als nächstes Resultat beweisen wir eine Reihe von wichtigen Ungleichungen, die wir im Folgenden ständig benutzen werden. Vorab definieren wir noch $\|\cdot\|_p = E[|X|^p]^{1/p}$. Die Minkowski-Ungleichung wird zeigen, dass dies für $p \geq 1$ auch eine Norm auf dem L^p ist.

Satz 2.2. Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen. Dann gilt:

(i) Für alle monoton wachsenden $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varepsilon > 0$ so dass $f(\varepsilon) > 0$

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[f(|X|)]}{f(\varepsilon)}, \quad \text{Markov-Ungleichung}$$

(ii) für $E[X^2] < \infty$, dass

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}, \quad \text{Tschebyscheff-Ungleichung}$$

(iii) für $0 < p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, dass

$$\|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q \quad \text{Hölder-Ungleichung}$$

für $p = q = 2$ und $r = 1$ erhalten wir die wichtige Cauchy-Schwarz-Ungleichung,

(iv) für $1 \leq p \leq \infty$, dass

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p, \quad \text{Minkowski-Ungleichung}$$

(v) für $0 < p \leq q$, und $X \in \mathcal{L}^q$, dass

$$\|X\|_p \leq \|X\|_q.$$

Bevor wir diesen Satz beweisen schließen wir noch die wichtige Jensen-Ungleichung an:

Satz 2.3 (Jensensche Ungleichung). Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $x \in \mathcal{L}^1$. Dann gilt

$$E[g(X)] \geq g(E[X]).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn für jede Gerade $a + bx$ tangential zu g an $x = E[X]$ gilt, dass $P(g(X) = a + bX) = 1$.

Beweis zu Satz 2.2:

(i) Da $f(\varepsilon) > 0$ und $f(x) \geq 0$ ist, folgt für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{|x| \geq \varepsilon\}} &\leq \mathbb{1}_{\{f(|x|) \geq f(\varepsilon)\}} = \mathbb{1}_{\left\{\frac{f(|x|)}{f(\varepsilon)} \geq 1\right\}} \\ &\leq \frac{f(|x|)}{f(\varepsilon)} \mathbb{1}_{\left\{\frac{f(|x|)}{f(\varepsilon)} \geq 1\right\}} \leq \frac{f(|x|)}{f(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Durch Monotonie des Erwartungswertes folgt die Behauptung.

(ii) Wir verwenden (i): Setzen wir $Y = |X - E[X]|$ und wählen $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (diese Funktion ist monoton), so gibt (i) das Resultat.

(iii) Zunächst ist e^x konvex und damit für $x, y \geq 0$

$$\begin{aligned} (xy)^r &= \exp(r \log x + r \log y) = \exp\left(\frac{r}{p} \log x^p + \frac{r}{q} \log x^q\right) \\ &\leq \frac{r}{p} x^p + \frac{r}{q} x^q. \quad (\text{da } \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1) \end{aligned}$$

Das wenden wir an auf $X' = \frac{|X|}{\|X\|_p}$, $Y' = \frac{|Y|}{\|Y\|_q}$ und erhalten

$$E[(X'Y')^r] \leq \frac{r}{p} \frac{E[|X|^p]}{\|X\|_p} + \frac{r}{q} \frac{E[|Y|^q]}{\|Y\|_q} = 1,$$

also

$$1 \geq E[(X'Y')^r] = \frac{E[|X'Y'|^r]}{\|X\|_p^r \|Y\|_q^r},$$

und die Behauptung folgt.

(iv) Dieser Beweis ist trickreicher. Zunächst ist

$$|x + y|^p = |x + y| \cdot |x + y|^{p-1} \leq |x| \cdot |x + y|^{p-1} + |y| \cdot |x + y|^{p-1}.$$

Mit (iii) folgt, dass

$$E[|x| \cdot |x + y|^{p-1}] \leq \|x\|_p \cdot \| |x + y|^{p-1} \|_q \quad \text{mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dabei ist

$$\| |x + y|^{p-1} \|_q = E[|x + y|^{(p-1) \cdot q}]^{1/q} = \|x + y\|_p^{p/q} = \|x + y\|_p^{p-1},$$

da $(p-1) \cdot q = p$ und $\frac{p}{q} = p-1$.

Das liefert $E[|x + y|^p] = \|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x + y\|_p^{p-1}$

(v) Zunächst ist $x \mapsto x^{p/q}$ konkav auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, also folgt mit Satz 2.3

$$E[|X|^p] = E[(|X|^q)^{p/q}] \leq (E[|X|^q])^{p/q}$$

und wir sind fertig. □

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

Beweis zu Satz 2.3: Für eine konvexe Funktion f gibt es an jedem Punkt x eine Tangente $y \mapsto a + by$, so dass

$$f(y) \geq a + by \quad \forall y.$$

Hierbei kann die Gerade auch als $f(x) + b(y - x)$ parametrisiert werden. Wir betrachten diese unterstützende Gerade am Punkt $E[X]$.

Dann ist

$$f(y) \geq f(E[X]) + b \cdot (y - E[X]).$$

Anwendung des Erwartungswertes liefert

$$E[f(X)] \geq f(E[X]) + b \cdot (E[X] - E[X]) = f(E[X]). \quad \square$$

Beweis. Für eine konvexe Funktion gibt es zu jedem Punkt x eine Gerade g durch x , so dass $f \geq g$. Wählen wir $x = E[X]$, so bedeutet das, es gibt $a \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x') \geq f(E[X]) + a(x' - E[X]).$$

Wir erhalten $E[f(x)] \geq f(E[X]) + 0$ und die Behauptung folgt. □

2.2 Charakteristische Funktionen

Als ein wichtiges Hilfsmittel zur Charakterisierung von Verteilungen erweisen sich Fourier- und Laplace-Transformierte.

Definition 2.4. Ist X eine d -dimensionale Zufallsvariable, so heißt $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\varphi(t) = E[e^{i\langle t, x \rangle}]$$

charakteristische Funktion oder Fourier-Transformierte von X .

Die Funktion $\mathcal{L} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, gegeben durch

$$\mathcal{L}(t) = E[e^{-\langle t, x \rangle}]$$

heißt (verallgemeinerte) Laplace-Transformierte von X .

Oft ist die genaue Bezeichnung Laplace/Fourier-Transformierte in der Literatur unterschiedlich, je nach Anwendungsgebiet. In diesem Skript habe ich mich für die obige Notation entschieden, weil sie in dieser Form für die Stochastik die einfachsten Ausdrücke liefert.

Satz 2.5. Es gilt

- (i) $|\varphi(t)| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ und $\varphi(0) = 1$.
- (ii) φ ist gleichmäßig stetig,
- (iii) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$ $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}^d$

Beweis. (i) und (iii) sind klar.

Für (ii) verwenden wir, dass mit majorisierter Konvergenz folgt:

$$|E[e^{itX} \cdot (e^{ihX} - 1)]| \stackrel{(i)}{\leq} |E[(e^{ihX} - 1)]| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

also $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq |E[(e^{ihX} - 1)]| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, so dass φ gleichmäßig stetig ist. \square

Beispiel 2.6. Folgende Beispiele sind wichtige Fourier-Transformierte:

- (i) Ist $X \sim B(n, p)$, so erhalten wir

$$E[e^{itx}] = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{itk} = (1-p + pe^{it})^n.$$

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

(ii) Ist $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, so erhalten wir

$$E[e^{itx}] = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{itk} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

(iii) Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so gilt zunächst, dass $E[e^{itx}] = E[e^{it\mu + it\sigma\xi}]$ mit $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Es bleibt die charakteristische Funktion für die Standardnormalverteilung zu berechnen:

$$E[e^{it\xi}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

wobei $\varphi(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist.

(iv) Ist schließlich $X \sim \text{Exp}(t)$, so erhalten wir

$$E[e^{-tx}] = \int_0^\infty e^{-tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

(v) Als Übungsaufgaben könnte man leicht die Laplace-transformierte an Stelle der charakteristischen Funktion berechnen, oder etwa mit der *momentenerzeugenden Funktion* $E[e^{tX}]$ einige der ersten Momente.

Satz 2.7. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable.

(i) Ist $X \in L^p$, so ist φ_X p -mal stetig differenzierbar und

$$\varphi_X^{(k)}(t) = E[(iX)^k e^{itx}], \quad k = 0, \dots, p$$

(ii) Für $X \in L^2$ gilt

$$\varphi(t) = 1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E[X^2] + \varepsilon(t) \cdot t^2$$

mit $\varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Beweis. (i) Da $X \in L^p$ existiert der Erwartungswert für $k \leq p$. Wir nutzen Induktion: $k = 0$ klar. Gelte die Behauptung für ein k . Dann ist

$$\left| \frac{d^{k+1} e^{itx}}{dt^{k+1}} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{(ix)^k e^{i(t+h)x} - (ix)^k e^{itx}}{h} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| x^k \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right|,$$

da $|e^{ix}| \leq 1$. Weiterhin gilt, dass

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ihx} - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{ihx + \frac{(ihx)^2}{2} + \dots}{h} \right| \\ &\leq |x| \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + |hx| + \frac{|hx|^2}{2} + \dots \right) = |x|, \end{aligned}$$

und somit gibt es für $\frac{d^{k+1}e^{itx}}{dt^{k+1}}$ eine integrierbare Majorante. Damit folgt

$$\varphi^{(kn)}(t) = E\left[\frac{d}{dt}(iX)^k e^{itX}\right] = E[(iX)^{k+1} e^{itX}].$$

Ebenso folgert man Stetigkeit der Ableitung mit majorisierter Konvergenz.

(ii) Die Taylor-Entwicklung mit Restglied liefert

$$e^{itX} = 1 + itX - \frac{t^2 X^2}{2} (\cos \theta_1 tX + i \sin \theta_2 tX)$$

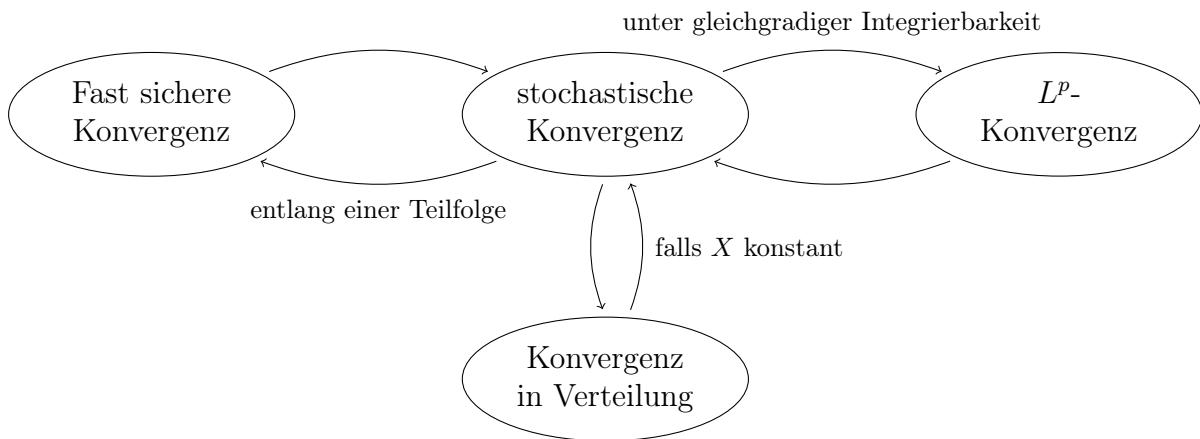
mit Zufallsvariablen θ_1, θ_2 und $|\theta_i| \leq 1, i = 1, 2$. Das ergibt

$$\varphi(t) = 1 + itE[X] - \frac{t^2}{2} E[X^2] + \varepsilon(t) t^2$$

mit $2\varepsilon(t) = E[X^2(1 - \cos \theta_1 tX - i \sin \theta_2 tX)] \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ wegen majorisierter Konvergenz. □

2.3 Stochastische Konvergenz

Wir werden nun verschiedene Konvergenzen kennenlernen.



Zusammenfassend ist die Konvergenz in Verteilung die schwächste Konvergenzform, sie wird von fast sicherer, L^p - und stochastischer Konvergenz impliziert. Fast sicherere und L^p -Konvergenz sind zwei recht unterschiedliche Konvergenzarten, für die jeweils unter Zusatzbedingungen Beziehungen aufgezeigt werden können. Eine kennen wir schon aus der Stochastik I: Der Übergang zu Teilfolgen. Ein neues Konzept, was wir in Kürze einführen werden, ersetzt das Kriterium majorisierte Konvergenz durch eine schwächere Bedingung, gleichgradige Integrierbarkeit, welche erlaubt aus fast sicherer Konvergenz L^p -Konvergenz zu schließen.

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 2.8. Seien X, X_1, X_2, \dots Zufallsvariable in einem metrischen Raum (E, d) .

(i) Gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

so konvergiert (X_n) *fast sicher* gegen X

$$(X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} X).$$

(ii) Gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(d(X_n, X) > \varepsilon) = 0,$$

so konvergiert (X_n) *stochastisch* gegen X

$$(X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X).$$

(iii) Sind $X, (X_n)$ reellwertig und gilt für $p > 0$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^p] = 0,$$

so konvergiert (X_n) *in L^p* (oder *im p -ten Mittel*) gegen X

$$(X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X).$$

Beispiel 2.9 (Gegenbeispiele). (i) Stochastische Konvergenz impliziert nicht fast sichere Konvergenz: Sei

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[0, \frac{1}{2}\right], & A_2 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ A_3 &= \left[0, \frac{1}{4}\right], \dots, & A_6 &= \left[\frac{3}{4}, 1\right], \dots \end{aligned}$$

und $X_n = \mathbf{1}_{\{U \in A_n\}}$ mit $U \sim U(0, 1)$.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(U \in A_n) = 0,$$

aber $X_n \not\xrightarrow{\text{f.s.}} 0$, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $n > n_k$ mit $X_n = 1$.

(ii) f.s. impliziert nicht L^1 : Sei $U \sim U[0, 1]$ und $B_n = [0, \frac{1}{n}]$ und $X_n = n \cdot \mathbf{1}_{\{U \in B_n\}}$. Dann $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$, aber

$$E[X_n] = n \cdot P(U \in B_n) = 1.$$

Lemma 2.10. Seien X, Y, X_1, X_2, \dots Zufallsvariable auf dem metrischen Raum (E, d) . Gilt $X_n \xrightarrow{P} X, X_n \xrightarrow{P} Y$, so folgt

$$X = Y \text{ P-f.s.}$$

Beweis. Aus der stochastischen Konvergenz folgt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$P(d(X, Y) > 2\varepsilon) \leq P(d(X_n, X) > \varepsilon \text{ oder } d(X_n, Y) > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also ist $P(d(X, Y) > 2\varepsilon) = 0$. Hieraus folgt

$$P(X \neq Y) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{d(X, Y) > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(d(X, Y) > \frac{1}{k}\right) = 0. \quad \square$$

Lemma 2.11. Seien X, X_1, \dots Zufallsvariable auf dem metrischen Raum (E, d) . Dann gilt

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \Leftrightarrow E[d(X_n, X) \wedge 1] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Aus $X_n \xrightarrow{P} X$ folgt $\forall \varepsilon > 0$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[d(X_n, X) \wedge 1] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon + P(d(X_n, X) > \varepsilon)) = \varepsilon.$$

„ \Leftarrow “ Umgekehrt folgt mit $0 < \varepsilon \leq 1$ aus der Markov-Ungleichung, dass

$$P(d(X_n, X) > \varepsilon) \leq \frac{E[d(X_n, X) \wedge 1]}{\varepsilon} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad \square$$

Satz 2.12. Es gelten folgende Aussagen:

(i) Fast-sichere impliziert stochastische Konvergenz

(ii) Fast-sichere Konvergenz ist äquivalent zu

$$\lim_n P\left(\bigcup_{k \geq n} \{|Z_k - Z| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

(iii) $\sum_n P(|Z_n - Z| > \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad Z_n \rightarrow Z \text{ fast sicher.}$

Das Kriterium (ii) nennt man auch *Cauchy-Kriterium* für die fast-sichere Konvergenz. Wir erhalten

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

Korollar 2.13. Gilt $Z_n \xrightarrow{P} Z$, so existiert eine Teilfolge $Z_{n(j)}$, welche fast sicher gegen Z konvergiert.

Beweis. Wähle $n(j)$ so dass $P(|Z_{n(j)} - Z| \geq \frac{1}{j}) \leq \frac{1}{j^2}$. Behauptung folgt aus (ii) des vorigen Satzes. \square

Beweis von Satz 2.12. Teil (i)+(ii): Zunächst einmal ist

$$1 = P(\lim_n Z_n = Z) = P\left(\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{|Z_k - Z| \leq \varepsilon\}\right). \quad (2.14)$$

Die Mengen $\bigcap_{k \geq n} \{|Z_k - Z| \leq \varepsilon\}$ sind monoton wachsend in n und ε , was wir nun geschickt ausnutzen. Mit der σ -Stetigkeit von P folgt, dass (2.14) äquivalent dazu ist, dass

$$1 = P\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{|Z_k - Z| \leq \varepsilon\}\right) \quad (2.15)$$

für alle¹ $\varepsilon > 0$. Eine zweite Anwendung der σ -Stetigkeit liefert, dass (2.14) äquivalent dazu ist, dass

$$\lim_n P\left(\bigcap_{k \geq n} \{|Z_k - Z| \leq \varepsilon\}\right) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Hieraus folgt

$$0 = \lim_n P\left(\bigcup_{k \geq n} \{|Z_k - Z| > \varepsilon\}\right), \quad (2.16)$$

was die Behauptung (ii) zeigt. Weiterhin ist

$$\lim_n P\left(\bigcup_{k \geq n} \{|Z_k - Z| > \varepsilon\}\right) \geq \lim_n P(|Z_n - Z| > \varepsilon)$$

und somit folgt die gesuchte stochastische Konvergenz.

Teil (iii): Für ein festes $\varepsilon > 0$ folgt mit Borel-Cantelli (Das Resultat werden wir aber erst in Theorem 2.33 beweisen), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n - Z| > \varepsilon) < \infty \quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \{|Z_k - Z| > \varepsilon\}\right) = 0$$

Das Komplement ist

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{|Z_k - Z| \leq \varepsilon\}\right) = 1. \quad (2.17)$$

Da ε beliebig gewählt war, liefert die Äquivalenz (2.15) nun die fast sichere Konvergenz. \square

¹In der Tat: Ist $1 = P(\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon)$ und gilt $A_\varepsilon \supset A_{\varepsilon'}$ für $\varepsilon > \varepsilon'$, so folgt $1 = P(\bigcap_{n \geq 0} A_{n^{-1}}) = \lim_n P(A_{n^{-1}})$. Da $\lim_n P(A_{n^{-1}}) \leq P(A_{n'^{-1}})$ für alle $n' \geq 1$, folgt sogar, dass $1 = P(A_{n^{-1}})$ für alle $n \geq 1$ und schließlich $1 = P(A_\varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$.

Für die Folgerung, dass fast sichere Konvergenz L^p -Konvergenz impliziert, benötigen wir eine integrierbare Majorante. Im Folgenden wollen wir diese Forderung abschwächen.

Definition 2.18. Eine Familie von reellen Zufallsvariablen $(X_i)_{i \in I}$ heißt *gleichgradig (uniform) integrierbar*, falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > k\}}] = 0.$$

Die englische Übersetzung ist *uniformly integrable*.

Beispiel 2.19. (i) Integrierbare Majorante: Sei $Y \in L^1$ und $\sup |X_i| < Y$. Dann ist $(X_i)_{i \in I}$ gleichgradig integrierbar, denn nach majorisierter Konvergenz

$$\sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > k\}}] \leq E[Y \mathbf{1}_{\{Y > k\}}] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

(ii) Jede endliche Familie integrierbarer Zufallsvariablen ist gleichgradig integrierbar, denn $\sup_{1 \leq i \leq n} |X_i| \in L^1$ und

$$\sup_{1 \leq i \leq n} E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > k\}}] \leq E\left[\sup_{1 \leq i \leq n} |X_i| \mathbf{1}_{\{\sup |X_i| > k\}}\right] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

(iii) Für $X_n = n \mathbf{1}_{\{U \in [0, \frac{1}{n}]\}}$, $U \sim U[0, 1]$ ist für $n > k$

$$E[|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n| > k\}}] = E[X_n],$$

also ist (X_n) nicht gleichgradig integrierbar.

(iv) Ist $\sup_{i \in I} \|X_i\|_{1+\varepsilon} < \infty$ mit $\varepsilon > 0$, so ist

$$\begin{aligned} \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > k\}}] &= \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i|^\varepsilon > k^\varepsilon\}}] \\ &\leq \sup_{i \in I} \frac{E[|X_i|^{1+\varepsilon}]}{k^\varepsilon} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Lemma 2.20. *Es sind äquivalent:*

(i) $(X_i)_{i \in I}$ ist gleichgradig integrierbar

(ii) $\sup_{i \in I} E[|X_i|] < \infty$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{A: P(A) < \varepsilon} \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_A] = 0$

(iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} E[(|X_i| - k)^+] = 0$.

(iv) Es gibt $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ und $\sup_{i \in I} E[f(|X_i|)] < \infty$.

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

Beweis:

(i) \Rightarrow (ii): Für $\delta > 0$ gibt es $k = k(\delta)$, sodass $\sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > k\}}] < \delta$. Dann ist für alle $A \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} E[|X_i| \mathbf{1}_A] &= E[|X_i| \mathbf{1}_{A \cap \{|X_i| > k\}}] + E[|X_i| \mathbf{1}_{A \cap \{|X_i| \leq k\}}] \\ &\leq \delta + k \cdot P(A). \end{aligned}$$

Mit $A = \Omega$ folgt

$$\sup_{i \in I} E[|X_i|] \leq \delta + k < \infty.$$

Außerdem ist

$$\sup_{A: P(A) < \varepsilon} \sup_{i \in I} E[|X_i|] \leq \delta + k \cdot \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta$$

Da δ beliebig war folgt (ii).

(ii) \Rightarrow (iii): Zunächst ist $(|X_i| - k)^+ \leq |X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| \geq k\}}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $k = k(\varepsilon)$, so dass

$$\frac{\sup_{i \in I} E[|X_i|]}{k} < \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt, dass $k(\varepsilon) \rightarrow \infty$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} E[(|X_i| - k)^+] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{i \in I} E[(|X_i| - k(\varepsilon))^+] \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > k(\varepsilon)\}}] \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{A: P(A) < \varepsilon} \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_A] = 0. \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (iv): Wir wählen $(k_n) \uparrow \infty$, so dass $\sup_{i \in I} E[(|X_i| - k_n)^+] \leq 2^{-n}$. Wir setzen

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} (x - k_n)^+.$$

Dann ist f monoton wachsend und konvex. Für $x \geq 2k_n$ ist $\frac{f(x)}{x} \geq \sum_{k=1}^n (1 - \frac{k_n}{x}) \geq \frac{n}{2}$, also $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$. Außerdem gilt wegen monotoner Konvergenz, dass

$$E[f(|X_i|)] = \sum_{n \geq 1} E[(|X_i| - k_n)^+] \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-k} = 1.$$

(iv) \Rightarrow (i): Setze $a(k) := \inf_{x \geq k} \frac{f(x)}{x}$, so dass $\lim_{k \rightarrow \infty} a(k) = \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| \geq k\}}] &\leq \frac{1}{a(k)} \sup_{i \in I} E[f(|X_i|) \mathbf{1}_{\{|X_i| \geq k\}}] \\ &\leq \frac{1}{a(k)} \sup_{i \in I} E[f(|X_i|)] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 2.21. Ist $X \in L^1$ und ist $(X_i)_{i \in J}$ gleichgradig integrierbar, so ist $(X_i - X)_{i \in I}$ gleichgradig integrierbar: Zunächst ist X gleichgradig integrierbar nach Beispiel 2.19. Außerdem ist

$$\sup_{i \in I} E[|X_i - X|] \leq E[|X|] + \sup_{i \in I} E[|X_i|] < \infty$$

und

$$\sup_{A: P(A) < \varepsilon} \sup_{i \in I} E[|X_i - X| \mathbf{1}_A] \leq \sup_{A: P(A) < \varepsilon} \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_A] + \sup_{A: P(A) < \varepsilon} E[|X| \mathbf{1}_A] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

und nach Lemma 2.20 ist $(X_i - X)_{i \in I}$ gleichgradig integrierbar. Die Umkehrung folgt analog.

Der folgende Satz ist der *Konvergenzsatz von Vitali*.

Theorem 2.22. Sei $0 < p < \infty$ und $X_1, X_2, \dots \in L^p$. Dann sind äquivalent

- (i) Es gibt $X \in L^p$ und $X_n \xrightarrow{L^p} X$
- (ii) $(|X_n|^p)$ ist gleichgradig integrierbar und es gibt eine Zufallsvariable X mit $X_n \xrightarrow{P} X$.

Gilt (i) oder (ii), so stimmen die Limiten überein.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Mit der Markov-Ungleichung gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} = \frac{\|X_n - X\|_p^p}{\varepsilon^p} \rightarrow 0,$$

so dass $X_n \xrightarrow{P} X$.

Nun verwenden wir Lemma 2.20 (ii): Sei $\varepsilon > 0$ und $N = N(\varepsilon)$ so, dass $\|X_n - X\|_p < \varepsilon \forall n \geq N$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sup E[|X_n|^p]^{1 \wedge \frac{1}{p}} &= \sup \|X_n\|_p^{p \wedge 1} \\ &\leq \sup_{n < N} \|X_n\|_p^{p \wedge 1} + \underbrace{\sup_{n \geq N} \|X_n - X\|_p^{p \wedge 1} + \|X\|_p^{p \wedge 1}}_{\leq \varepsilon^{p \wedge 1}} < \infty \end{aligned}$$

unter Verwendung der Minkowski-Ungleichung².

²Das kann als Übungsaufgabe nachgerechnet werden. Sie können einfach $0 < p < 1$ und $p \geq 1$ getrennt betrachten.

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

Für $A \in \mathcal{F}$ erhalten wir ebenso

$$\begin{aligned} \sup (E[|X_n|^p \mathbf{1}_A])^{1 \wedge \frac{1}{p}} &= \sup \|X_n \mathbf{1}_A\|_p^{p \wedge 1} \\ &\leq \sup_{n < N} \|X_n \mathbf{1}_A\|_p^{p \wedge 1} + \underbrace{\sup_{n \geq N} \|(X_n - X) \mathbf{1}_A\|_p^{p \wedge 1} + \|X \mathbf{1}_A\|_p^{p \wedge 1}}_{\leq \varepsilon^{p \wedge 1}}. \end{aligned}$$

Da $\|X \mathbf{1}_A\|_p \rightarrow 0$ für $P(A) \rightarrow 0$, folgt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{A: P(A) < \delta} \sup_{n \in \mathbb{N}} E[|X_n|^p \mathbf{1}_A] \leq \varepsilon^{2p \wedge 1}$$

Die Behauptung folgt, weil $\varepsilon > 0$ beliebig war.

(ii) \Rightarrow (i) Aus $X_n \xrightarrow{P} X$ folgt die Existenz einer Teilfolge (n_k) so dass $X_{n_k} \xrightarrow{\text{f.s.}} X$. Außerdem ist $\sup E[|X_n|^p] < \infty$ nach Lemma 2.20(ii). Nach dem Lemma von Fatou, Theorem ??, ist

$$E[|X|^p] = E\left[\liminf_{k \rightarrow \infty} |X_{n_k}|^p\right] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} E[|X_n|^p] < \infty$$

und somit $X \in L^p$. Weiterhin ist $|X_n - X|^p$ gleichgradig integrierbar (siehe Beispiel 2.21).

Da nach Voraussetzung

$$P(|X_n - X| > \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^p] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^p \mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \delta\}}] + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{E[|X_n - X|^p \mathbf{1}_{\{|X_n - X| < \delta\}}]}_{\leq \delta^p} \\ &\leq \delta^p \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt, weil δ beliebig war. \square

Korollar 2.23. Seien $0 < p < \infty$, $X_1, X_2, \dots \in L^p$ und $X_n \xrightarrow{P} X$. Dann sind äquivalent

- (i) $X_n \xrightarrow{L^p} X$
- (ii) $\|X_n\|_p \rightarrow \|X\|_p$
- (iii) $(|X_n|^p)_{n \geq 1}$ ist gleichgradig integrierbar

Wir schließen noch einige Bemerkungen über Konvergenz in Verteilung an, welche wir aber später noch ausführlicher behandeln. Wir betrachten den metrischen Raum (E, d) . Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &= \{\mu : \mu \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathcal{B}(E)\} \\ \mathcal{P}_{\leq 1}(E) &= \{\mu : \mu \text{ Maß auf } \mathcal{B}(E) \text{ mit } \mu(E) \leq 1\} \end{aligned}$$

Aus dem Kontext heraus sollte keine Verwechslungsgefahr von $\mathcal{P}(E)$ mit der Potenzmenge von E bestehen. Mit $C_b(E)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen, beschränkten, reellwertigen Funktionen auf \mathbb{Z} .

Definition 2.24. Die Folge $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}(E)$ konvergiert *schwach* gegen $P \in \mathcal{P}(E)$, falls

$$\int f dP_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f dP$$

für alle $f \in C_b(E)$. Wir schreiben dann $P_n \Rightarrow P$.

Lemma 2.25. Gilt $\mu_n \Rightarrow \mu$ und $\mu_n \Rightarrow \nu \Rightarrow \mu = \nu$.

Beweis. Nach Satz 1.15 reicht es, $\mu(A) = \nu(A)$ für alle abgeschlossenen $A \subseteq E$ zu zeigen, da die Menge der abgeschlossenen Mengen ein durchschnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(E)$ ist. Setze

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

$$f_m(x) := (1 - m \cdot d(x, A))^+.$$

Dann gilt $f_m \Rightarrow \mathbb{1}_A$, also

$$\mu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_m d\mu_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m d\nu = \nu(A)$$

wegen majorisierter Konvergenz. □

Definition 2.26. Sind X, X_1, X_2, \dots Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P), (\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2), \dots$ mit Werten in \mathbb{Z} . Wir sagen X_1, X_2, \dots *konvergieren in Verteilung* gegen X , falls $(X_n)_* P_n \Rightarrow X_* P$. Wir schreiben

$$X_n \Rightarrow X.$$

Satz 2.27. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \Rightarrow X$. Ist X konstant, so gilt auch die Umkehrung.

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

Beweis. Sei also $X_n \xrightarrow{P} X$. Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch. Angenommen für $f \in C_b(Z)$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n)] \neq E[f(X)]$. Dann gibt es eine Teilfolge n_k und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |E[f(X_{n_k})] - E[f(X)]| > \varepsilon.$$

Da $X_n \xrightarrow{P} X$ gibt es eine Teilfolge $(n_{k_e}), e = 1, 2, \dots$, so dass $X_{n_{k_e}} \xrightarrow{f.s.} X$. Mit majorisierter Konvergenz folgt

$$\lim_{e \rightarrow \infty} E[f(X_{n_{k_e}})] = E[f(X)],$$

ein Widerspruch.

Ist umgekehrt $X = c \in Z$. Dann ist $x \rightarrow d(x, c) \wedge \mathbf{1} \in C_b(E)$ und somit

$$\mathbb{E}[d(X_n, c) \wedge \mathbf{1}] \rightarrow E[d(X, c) \wedge \mathbf{1}] = 0,$$

also $X_n \xrightarrow{P} X$ wegen der Definition von stochastischer Konvergenz. □

Sind X, X_1, X_2, \dots identisch verteilt $\Rightarrow X_n \Rightarrow X$, allerdings gilt typischerweise weder f. s. noch stochastische Konvergenz (außer wenn X konstant ist, wie ein folgender Satz zeigt).

2.4 Das starke Gesetz der großen Zahlen

Ein zentrales Konzept dieses Grenzwertsatzes ist die Unabhängigkeit. Wir werden in diesem Zusammenhang auch die wichtigen Hilfsmittel von Borel-Cantelli und das Kolmogorov'sche 0-1-Gesetz kennenlernen.

Definition 2.28. (i) Eine Familie messbarer (d. h. $A_i \in \mathcal{F}$) Mengen $(A_i)_{i \in I}$ heißt *unabhängig*, falls

$$P\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) = \prod_{j \in I} P(A_j) \tag{2.29}$$

für alle $I \subset \mathcal{F}$ endlich.

(ii) Eine Familie von Mengensystemen $(C_i)_{i \in I}$, $C_i \subseteq \mathcal{F} \forall i \in I$ heißt *unabhängig*, falls (2.29) für alle $I \subseteq \mathcal{F}$, \mathcal{F} endlich und $A_j \in C_j$, $j \in I$, gilt.

(iii) Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_i)_{i \in I}$ heißt *unabhängig*, falls $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ unabhängig sind.

Man erhält unmittelbar, dass $(X_i)_{i \in I}$ unabhängig sind, falls sich ihre gemeinsamen Verteilungen als Produkt von den Marginalien ergibt, d.h.

$$\left. \begin{aligned} P(X_i \in A_i, i \in I) &= \prod_{i \in I} P(X_i \in A_i) \\ \Leftrightarrow ((X_i)_{i \in I})_* &= \bigotimes_{i \in I} (X_i)_* P \end{aligned} \right\} \text{für alle } I \subset \mathcal{F}, I \text{ endlich.}$$

Als wichtiges Hilfsmittel erweist sich das folgende „Blockungslemma“:

Lemma 2.30. Seien $(\Omega'_i, \mathcal{F}'_i)$, $(\Omega''_i, \mathcal{F}''_i)$, $i \in J$, messbare Räume und $(X_i)_{i \in J}$ unabhängige Zufallsvariable mit $X_i : \Omega \rightarrow \Omega'_i$. Sind $\varphi_i : \Omega'_i \rightarrow \Omega''_i$ messbar, $i \in J$, so ist

$$(\varphi_i(X_i))_{i \in J} \quad \text{unabhängig.}$$

Beweis. Zunächst ist $\sigma(\varphi_i(X_i)) \subset \sigma(X_i)$, da φ_i messbar. Da $\sigma(X_i)_{i \in J}$ bereits unabhängig sind, folgt die Behauptung. \square

Zwei Zufallsvariablen heißen **unkorreliert**, falls $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Wir erhalten leicht, dass Unabhängigkeit Unkorreliertheit impliziert.

Satz 2.31. Sind $X, Y \in L^1$ unabhängig, so ist $X \cdot Y \in L^1$ und

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y].$$

Beweis. Die Aussage gilt zivilerweise für $X = \mathbb{1}_A$ und $Y = \mathbb{1}_B$. Mit Linearität folgt die Aussage für einfache X, Y mit monotoner Konvergenz für Positiv-/Negativteile und somit die Behauptung. \square

Beispiel 2.32. Ist $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, so ist X, X^2 unkorreliert aber nicht unabhängig.

Sind A_1, A_2, \dots Ereignisse, so definiert der folgende Limes Superior das Ereignis „unendlich viele der (A_n) treten ein“.

Definition 2.33. Für $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ definieren wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m.$$

Theorem 2.34 (Borel-Cantelli).

(i) Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

(ii) Sind die $(A_n)_{n \geq 1}$ unabhängig, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1.$$

Beweis:

(i) Stetigkeit von oben von P impliziert

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \geq n} P(A_m) = 0.$$

(ii) Für $x \in [0, 1]$ gilt: $\log(1 - x) \leq -x$ also folgt mit Stetigkeit von unten, dass

$$\begin{aligned} P((\limsup A_n)^c) &= P\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} A_m^c\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{m \geq n} \log(1 - P(A_m))\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{m \geq n} P(A_m)\right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 2.35 (Unendlicher Münzwurf). X_1, X_2, \dots iid, $X_i \in \{0, 1\}$ und $P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow$ fast sicher erscheint unendlich mal Kopf.

Auf die Unabhängigkeit kann nicht verzichtet werden: Ist

$$B_1 = B_2 = B_n = \{X_1 = \text{Kopf}\},$$

so gilt $\sum P(B_n) = \infty$, aber $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n) = P(X_1 = \text{Kopf}) = \frac{1}{2}$.

Die Aussagen „unendlich oft tritt Kopf ein“ bilden eine spezielle Klasse von Ereignissen, die wir nun genau untersuchen.

Satz 2.36. Sei $(C_i)_{i \in J}$ eine Familie unabhängiger Mengensysteme. Ist jedes C_i , $i \in J$, durchschnittstabil, so sind auch $(\sigma(C_i))_{i \in J}$ unabhängig.

Beweis. Sei $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subset I$ und ohne Einschränkung $|J| > 1$. Wir definieren

$$\mathcal{D} := \left\{ A \in J : P(A \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_n}) = P(A) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_{j_i}) \right\}.$$

Dann ist \mathcal{D} Dynkin-System, denn

- 1) $A \subseteq B, A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$: Mit $C = \bigcap_{i=2}^n A_{j_i}$ ist

$$\begin{aligned} P\left(B \setminus A \cap \bigcap_{i=2}^n A_{j_i}\right) &= P(B \cap C) - P(A \cap C) = (P(B) - P(A)) \prod_{i=2}^n P(A_{j_i}) \\ &= P(B \setminus A) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_{j_i}) \end{aligned}$$

- 2) Für $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ ist $(\sigma\text{-Stetigkeit von unten})$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap C\right) &\stackrel{(2.29)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m \cap C) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m) \cdot \prod_{i=3}^n P(A_{j_i}) \\ &\stackrel{(2.29)}{=} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_{j_i}). \end{aligned}$$

Da C_{i_1} durchschnittstabil ist, ist $\sigma(C_{i_1}) \subseteq \mathcal{D}$, also folgt

$$P(A \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_n}) = P(A) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_{j_i})$$

für alle $A \in \sigma(C_{i_1})$. Da die Wahl von i_1 beliebig war, erhält man die Aussage. \square

Bemerkung 2.37. (i) Als leichte Folgerung erhält man, dass $(A_i)_{i \in J}$ genau dann unabhängig sind, falls $(\mathbb{1}_{A_i})_{i \in J}$ unabhängig sind.

- (ii) Ist $(J_i)_{i \in J}$ eine Familie unabhängiger σ -Algebren und $\mathcal{I} = \{I_k : K \in \mathcal{K}\}$ eine Partition von J , so sind auch $(\sigma(\mathcal{F}_i : i + I_k) : k + K)$ unabhängig.

2.4.1 Der Beweis des starken Gesetzes

Dieser Abschnitt widmet sich dem Beweis des starken Gesetzes der großen Zahl. Wir werden noch einige Hilfsmittel entwickeln, bevor wir den Beweis führen können.

Ein erstes, zentrales Hilfsmittel ist die Maximalungleichung von Kolmogorov. Sie wird oft mit Hilfe von Stoppzeiten³ bewiesen, was in dem Setting hier aber nicht nötig ist und wir

³Siehe etwa Rüschemdorf(2016), Satz 2.6.3.

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

präsentieren einen elementaren Beweis.

Satz 2.38 (Maximal-Ungleichung). *Seien X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen mit $E[X_i] = 0$, $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$, das*

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2. \quad (2.39)$$

Beweis. Zentral in dem Beweis ist die disjunkte Zerlegung von $\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}$ in $\sum_{k=1}^n A_k$ mit $A_k = \{|S_k| \geq \varepsilon, |S_j| < \varepsilon \text{ für } j < k\}$.

Dann ist

$$P(A_k) = E\left[\mathbb{1}_{\{|S_k| \geq \varepsilon, |S_j| < \varepsilon, j < k\}}\right] \leq E\left[\frac{S_k^2}{\varepsilon^2} \mathbb{1}_{A_k}\right].$$

Als nächsten Schritt möchten wir S_k^2 durch S_n^2 abschätzen, wofür wir die Unabhängigkeit und Zentriertheit der (X_i) ausnutzen. Denn es gilt, dass

$$\begin{aligned} E[S_k(S_n - S_k) \mathbb{1}_{A_k}] &= 0, \\ E[(S_n - S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}] &\geq 0 \end{aligned}$$

und somit

$$P(A_k) \leq \varepsilon^{-2} E\left[(S_k + (S_n - S_k))^2 \mathbb{1}_{A_k}\right] = \varepsilon^{-2} E\left[S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Kombinieren wir die Maximal-Ungleichung mit unseren Konvergenzkriterien für fast-sichere Konvergenz erhalten wir folgenden Konvergenzsatz. Bemerkenswert ist hieran, dass nicht i.i.d. vorausgesetzt wird, sondern lediglich Unabhängigkeit (und eben Summierbarkeit der Varianzen).

Satz 2.40. *Sind X_1, X_2, \dots unabhängig und gilt $E[X_n] = 0$ für alle $n \geq 1$ sowie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty,$$

so konvergiert $\sum_{n \geq 1} X_n$ P -fast sicher.

Beweis. Zunächst müssen wir nach dem Cauchy-Kriterium für fast-sichere Konvergenz, Satz 2.12 (ii) zeigen, dass

$$P\left(\sup_{n \geq m} |S_n - S_m| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$$

für $m \rightarrow \infty$. Die Maximal-Ungleichung liefert aber bereits, dass

$$P\left(\max_{m \leq n \leq k} |S_n - S_m| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=m+1}^k \text{Var}(X_n).$$

Mit Hilfe der σ -Stetigkeit folgt, dass

$$P\left(\sup_{n \geq m} |S_n - S_m| \geq \varepsilon\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\max_{m \leq n \leq k} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \text{Var}(X_k).$$

Für $m \rightarrow \infty$ konvergiert der letzte Ausdruck gegen Null und die Behauptung ist bewiesen. □

Oft wollen wir eine Folge von Zufallsvariablen nur ein bisschen verändern, ohne dass sich das Konvergenzverhalten ändert.

Definition 2.41. Zwei Folgen von Zufallsvariablen (X_n) und (Y_n) heißen *stochastisch äquivalent*, falls

$$\sum_{n \geq 1} P(X_n \neq Y_n) < \infty. \tag{2.42}$$

Mit dem Satz von Borell-Cantelli folgt sofort, dass beide Folgen fast sicher konvergieren, falls sie stochastisch äquivalent sind: Denn (2.42) impliziert, dass

$$P(\limsup\{X_n \neq Y_n\}) = 0.$$

D.h. es existiert eine Menge A mit Wahrscheinlichkeit eins und eine Zufallsvariable $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\omega \in A$ und $n \geq n_0(\omega)$ gilt, dass $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$. Dann folgt, dass $\sum_{n \geq 1} (X_n - Y_n)$ fast sicher konvergiert.

Zentrales Konvergenzkriterium wird der folgende Drei-Reihensatz sein:

Satz 2.43. Seien X_1, X_2, \dots unabhängige Zufallsvariablen. Dann konvergiert $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ genau dann P -fast sicher, falls ein $c \in (0, \infty)$ existiert, so dass die folgenden drei Reihen konvergieren:

$$(i) \sum_{n \geq 1} P(|X_n| \geq c), \quad (ii) \sum_{n \geq 1} \text{Var}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \geq c\}}) \quad (iii) \sum_{n \geq 1} E[X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \geq c\}}].$$

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

Beweis. Betrachten wir $Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq c\}} - E[X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq c\}}]$. Dann impliziert Bedingung (ii) mit Satz 2.40, dass $\sum_{k=1}^n Y_k$ fast sicher konvergiert. Mit (iii) erhalten wir, dass auch

$$\sum_{k=1}^n X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \geq c\}} = \sum_{k=1}^n Y_k + \sum_{k=1}^n E[X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \geq c\}}]$$

konvergiert.

Bedingung (i) impliziert, dass (X_n) und $(X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq c\}})$ asymptotisch äquivalent sind, denn

$$\sum_{n \geq 1} P(X_n \neq X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq c\}}) = \sum_{n \geq 1} P(|X_n| \geq c).$$

Nach obiger Bemerkung konvergiert also auch $\sum_{k=1}^n X_n$. □

Als letzter Schritt benötigen wir das Kronecker Lemma.

Lemma 2.44. Seien x_1, x_2, \dots reelle Zahlen, a_1, a_2, \dots positive Zahlen mit $a_n \uparrow \infty$ so, dass $\sum \frac{x_n}{a_n}$ konvergiert. Dann gilt, dass

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n x_k \longrightarrow 0.$$

Beweis folgt.

Wir erhalten das starke Gesetz der großen Zahl von Kolmogorov in einer allgemeinen Form.

Theorem 2.45 (Starkes Gesetz großer Zahlen). Seien $X_1, X_2, \dots \subseteq L^2$ unabhängige und reellwertige Zufallsvariablen. Gibt es eine Folge positiver Zahlen $a_n \uparrow \infty$, so dass

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(X_n)}{a_n^2} < \infty,$$

so folgt, dass

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (X_k - E[X_k]) \longrightarrow 0$$

P -fast sicher.

Beweis. Wir setzen $Y_n = (a_n)^{-1}(X_n - E[X_n])$. Dann sind Y_1, Y_2, \dots unabhängig, zentriert und $\sum \text{Var}(Y_n) < \infty$ nach Voraussetzung. Nach Satz 2.40 konvergiert $\sum_{k=1}^n Y_k$ P -fast sicher.

Nach dem Kronecker Lemma folgt, dass

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n a_k Y_k = \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (X_k - E[X_k]) \longrightarrow 0$$

P -fast sicher. □

Literatur

- H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley, 3rd edition, 1995.
- V. I. Bogachev. *Gaussian Measures*. American Mathematical Society, 1991.
- J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- L. Rüschendorf. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2016.
- D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000.

Index

- L^p
 - Banach-Raum, 22
- absolut stetiges Maß, 26
- additiv, 13
- additive Fortsetzung, 9
- Algebra, 8
- Approximationssatz, Weierstraß, 37
- äquivalente Maße, 26
- äußeres Maß, 7, 13

- Banach-Raum, 22
- Bildmaß, 17
- Blockungslemma, 57
- Borel- σ -Algebra, 5
- Borel-Cantelli-Theorem, 58
- Borel-messbar, 17

- Cauchy-Kriterium, 49
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 42

- Dichte, 26
- Dirac-Maß, 28
- durchschnittsstabil, 5
- Dynkin-System, 5

- eindeutige Zerlegung, 25
- Eindeutigkeit, 12
- endlich, 7
- Erzeugenden-Halbring, 16
- erzeugter Ring, 9
- Existenzsatz von Kolmogorov, 37

- Faltung, 36, 37
- Familie
 - projektive, 37
- fast sichere Konvergenz
 - Cauchy-Kriterium, 49
- fast sichere Konvergenz, 48
- Fatou-Konvergenz, 20
- Fortsetzung
 - einzigste additive, 9
 - von Maßen, 7
- Fortsetzungssatz, 15
- Fourier-Transformierte, 45
- f. ü., 19
- Fubini, Satz von, 34, 36
- Funktion
 - charakteristische, 45
 - momentenerzeugende, 46

- Gesetz, starkes, der großen Zahlen, 56
- gleichgradig integrierbar, 51
- große Zahlen, starkes Gesetz, 56

- Hölder-Ungleichung, 42
- Hahn-Zerlegung, 25
- Halbring, 7
 - Erzeugenden-, 16
- Hilbertraum, 23

- Inhalt, 7, 13
- integrierbar
 - gleichgradig, 51
 - uniform, 51
- integrierbare Majorante, 51
- Ionescu-Tulcea-Theorem, 35

- Jensensche Ungleichung, 42
- Jordan-Zerlegung, 25

- Kapazität, 7
- Kern
 - Markovscher, 34
 - stochastischer, 34
- Kolmogorov
 - Existenzsatz, 37
- kompakter Raum, 30
- Konvergenz
 - fast sichere, 48
 - Fatou-, 20
 - im p -ten Mittel, 21, 48

Index

- in L^p , 48
- majorisierte, 21
- monotone, 20
- schwache, 55
- stochastische, 47, 48
- konvergieren
 - in Verteilung, 55
- Laplace-Transformierte, 45
- Lebesgue-Maß, 7
 - mehrdimensionales, 36
- Lebesgue-Zerlegung, 29
- Limes
 - projektiver, 38
 - Superior, 57
- Münzwurf, unendlicher, 58
- Maß
 - Lebesgue-, mehrdimensionales, 36
 - mehrdimensionales Lebesgue-, 36
- Majorante
 - integrierbare, 51
- majorisierte Konvergenz, 21
- Markov-Kette, 34
- Markov-Ungleichung, 42
- Markovscher Kern, 34
- Maß, 7
 - absolut stetiges, 26
 - äquivalent, 26
 - auf \mathbb{R} , 16
 - äußeres, 7, 13
 - Bildmaß, 17
 - Dirac-, 28
 - Fortsetzung, 7, 12
 - Lebesgue-, 7
 - Prämaß, 7
 - signiertes, 24
 - singuläres, 25
- Maßraum, 17
- Maßtheorie, 4
- Maximal-Ungleichung, 60
- mehrdimensionales Lebesgue-Maß, 36
- messbarer Raum, 17
- Messbarkeit, 34
- minimale Zerlegung, 25
- Minkowski-Ungleichung, 42
- momentenerzeugende Funktion, 46
- monotone Konvergenz, 20
- negativ, 24
- Nullmenge, 24
- p. d., *siehe* paarweise disjunkt
- paarweise diskunkt, 16
- Parallelogrammidentität, 23
- polnisch, 37
- polnischer Raum, 30
- positiv, 24
- Prämaß, 7
- Produktraum, 30
- Produkttopologie, 31
- Projektion, 30
- projektive Familie, 37
- projektiver Limes, 38
- Radon-Nikodým, Satz von, 28
- Raum
 - kompakt, 30
 - Maß-, 17
 - messbar, 17
 - polnischer, 30
- reellwertig, 17
- Riesz-Fréchet, Satz von, 23
- Ring, 8
 - erzeugter, 9
- Satz
 - Eindeutigkeit, 12
 - Existenzsatz von Kolmogorov, 37
 - Fortsetzungssatz, 15
 - Fubini, 34, 36
 - Hahn-Zerlegung, 25
 - Jordan-Zerlegung, 25
 - Kolmogorov, Existenzsatz, 37
 - Lebesgue-Zerlegung, 29
 - Radon-Nikodým, 24, 28
 - Riesz-Fréchet, 23
- schnittstabil, 5
- schwache Konvergenz, 55
- σ -Additivität, 7
- σ -Algebra, 4
- σ -finit, 7
- signiertes Maß, 24
- singuläres Maß, 25
- starkes Gesetz der großen Zahlen, 56
- stetig von oben/unten, 10
- stochastische Konvergenz, 47, 48
- stochastischer Kern, 34

Subadditivität, 9

Theorem

Borel-Cantelli-, 58

Ionescu-Tulcea, 35

Topologie

Produkt-, 31

Transformierte

Fourier-, 45

Laplace-, 45

Übergangskern, 34

unabhängig, 56, 58

Ungleichung

Cauchy-Schwarz-, 42

Hölder-, 42

Jensensche, 42

Markov-, 42

Maximal-, 60

Minkowski-, 42

wichtig, 42

uniform integrierbar, 51

unkorreliert, 57

Verteilung, 39

vollständig, 22

Wahrscheinlichkeitstheorie, 39

Weierstraß'scher Approximationsatz, 37

Zerlegung

eindeutige, 25

Lebesgue-, 29

minimale, 25

Zufallsvariable, 39