Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. Thorsten Schmidt[1]

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesung im WS 2019/00

Stand: 20. November 2019

[1] www.stochastik.uni-freiburg.de/schmidt

Inhaltsverzeichnis

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie **4**
1.1 Einführung 4
1.2 Die Fortsetzung von Maßen 12
1.3 Maße auf $\mathbb{R}$ 16
1.4 Hilberträume 23
1.5 Signierte Maße und der Satz von Radon-Nikodým 24
1.6 Produkträume 30
1.7 Der Satz von Fubini 34
1.8 Der Existenzsatz von Kolmogorov 37

2. Wahrscheinlichkeitstheorie **39**
2.1 Grundlagen 39

Vorwort

Dieses Skriptum ist vorläufig ! Es enthält offensichtlich noch viele Fehler – also bitte mit dem entsprechenden Fingerspitzengefühl lesen. Für Rückmeldungen sind wir natürlich äußerst dankbar und würden uns über eine Email sehr freuen.

Freiburg, im Oktober 2019 | Thorsten Schmidt

1. Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie

Die Entwicklung eines präzisen Begriffs für Wahrscheinlichkeit hat die Mathematiker sehr lange beschäftigt. Es war die Idee von Andrei N. Kolmogorov (1903–1987) das Hilfsmittel *„Maß“* aus der Analysis hierfür zu verwenden und Zugang zu der mächtigen Maß-Integrationstheorie von Henri L. Lebesgue (1875–1941) zu erlangen.

Aus diesem Grund sind die Begriffe *Maß* und *Integral* für Stochastiker besonders wichtig. Im Unterschied zur Analysis, beziehungsweise zum Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, sind wir allerdings stets an endlichen Maßen ($\mu(\Omega) = 1$) interessiert, aber mit einem beliebigen Ω. Dieser Abschnitt wiederholt kurz die notwendigen Techniken aus der Analysis III.

1.1 Einführung

Ein zentrales Konzept wird die Erzeugung von σ-Algebren sein, worauf wir einen besonderen Augenmerk richten. Sei Ω eine (beliebige) Menge und $\mathscr{P}(\Omega)$ die Menge aller Teilmengen von Ω.

Definition 1.1. Ein Mengensystem $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra* (auf Ω), falls für alle $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ gilt, dass

(i) $\varnothing \in \mathscr{F}$

(ii) $A^c \in \mathscr{F}$

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

Mit $\mathscr{P}(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von Omega. Der Schnitt von (beliebig vielen) σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra ($\to$ Übung), so dass man für ein $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ die von **C erzeugte σ-Algebra** definiert durch

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap \big\{ \mathscr{F} \supseteq \mathscr{C} : \mathscr{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \big\}.$$

Ein *topologischer Raum* $(\Omega, \mathcal{O})$ ist ein Raum Ω mit einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, wobei die Elemente von $\mathcal{O}$ als offen bezeichnet werden, so dass

(i) $\varnothing, \Omega \in \mathscr{O}$

(ii) der endliche Schnitt von offenen Mengen ist wieder offen

(iii) die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen.

Definition 1.2. Sei $(\Omega, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $\mathscr{B}(\Omega) = \sigma(\mathscr{O})$ die *Borel-σ-Algebra* auf $(\Omega, \mathscr{O})$.

Hat $\mathscr{O}$ eine abzählbare Basis[1] B, so ist $\sigma(\mathscr{O}) = \sigma(B)$. $\to$ Übung.

Insbesondere erzeugt $C = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{Q}\}$ die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Das gilt auch für die 2-Punkt-Kompaktifizierung

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Oft gibt es geeignete, einfache erzeugende Systeme[2]

Definition 1.3. Ein Mengensystem $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ heißt *Dynkin-System*, falls für alle $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{D}$ gilt:

(i) $\Omega \in \mathscr{D}$

(ii) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathscr{D}$

(iii) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$

Natürlich ist jede σ-Algebra ein Dynkin-System. Ein Mengensystem $\mathscr{C}$ heißt *durchschnittsstabil*, fall mit $A, B \in \mathscr{C}$ auch $A \cap B \in \mathscr{C}$.

Lemma 1.4. *Ist $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System und $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ durchschnittsstabil, so gilt*

$$\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}.$$

Insbesondere ist jedes durchschnittsstabile Dynkin-System eine σ-Algebra.

[1] Eine Menge B heißt Basis, falls sich jede offene Menge als Vereinigung beliebig vieler Mengen aus B schreiben lässt.

[2] In der englischen Literatur heißt ein durchschnittliches System π-System; ein Dynkin-System λ-System (s. Billingsley(1995)).

Beweis. Wir definieren

$$\lambda(\mathscr{C}) = \bigcap \{\mathscr{F} \supseteq \mathscr{C} : \mathscr{F} \text{ Dynkin-System}\}$$

Da der Schnitt von Dynkin-Systemen wieder ein Dynkin-System ist, ist $\lambda(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$. Der Rest des Beweises unterteilt sich in drei Schritte:

1. $\lambda(\mathscr{C})$ ist durchschnittsstabil: Seien $A, B \in \lambda(\mathscr{C})$. Sind $A, B \in \mathscr{C}$, so folgt auch $A \cap B \in \mathscr{C} \subseteq \lambda(\mathscr{C})$. Sei nun lediglich $B \in \mathscr{C}$ und

$$\mathscr{D}_B := \{A \subseteq \Omega : A \cap B \in \lambda(\mathscr{C})\}.$$

Dann ist $\mathscr{D}_B$ ein Dynkin-System, denn für $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{D}_B$ gilt

(i) $\Omega \in \mathscr{D}_B$

(ii) Sind $A_1 \cap B, A_2 \cap B \in \lambda(\mathscr{C})$ mit $A_1 \subseteq A_2$, so folgt

$$(A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) = (A_2 \setminus A_1) \cap B \in \lambda(\mathscr{C}).$$

(iii) ebenso $A_i \cap B \subseteq A_{i+1} \cap B \Rightarrow$

$$\Big(\bigcup A_i\Big) \cap B = \bigcup \Big(A_i \cap B\Big) \in \lambda(\mathscr{C}).$$

Da $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_B$ folgt nun $\lambda(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}_B$.

Wir erhalten für $A \in \lambda(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}_B$, dass

$$A \cap B \in \lambda(\mathscr{C}). \qquad \text{(Def. von } \mathscr{D}_B\text{)}$$

Nun setzen wir für $A \in \lambda(\mathscr{C})$

$$\mathscr{D}_A := \{B \subseteq \Omega : A \cap B \in \lambda(\mathscr{C})\}.$$

Wie vorher zeigt man, dass $\mathscr{D}_A$ ein Dynkin-System ist mit $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_A$. Wieder folgt $\lambda(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}_A$, also für $A, B \in \lambda(\mathscr{C})$ gerade

$$A \cap B \in \lambda(\mathscr{C}). \qquad \text{Das war 1)}$$

2. $\lambda(\mathscr{C})$ ist σ-Algebra: Für $A_1, A_2, \ldots \in \lambda(\mathscr{C})$ ist

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\Big)^c \in \lambda(\mathscr{C}) \qquad (A^c \in \mathscr{D},\ \mathscr{D} \text{ Dynkin}) \blacksquare$$

und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \lambda(\mathscr{C}).$$

3. Abschließend erhalten wir $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \sigma(\lambda(\mathscr{C})) = \lambda(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{C}$.

□

Nun kommen wir zu den wichtigen Begriffen **Maß** und **Kapazität**. Die folgenden Begriffe kann man auch für Ringe und Halbringe anstelle von σ-Algebren definieren. Auch kann man signierte Maße mit möglicherweise negativen Werten betrachten. Wir setzen $\bar{\mathbb{R}}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Definition 1.5. Sei $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathscr{F} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Gilt für $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathscr{F}$ paarweise disjunkt, dass

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) $\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$,

so heißt μ *Maß*. Das Maß μ heißt *endlich*, falls $\mu(\Omega) < \infty$, und es heißt *σ-finit*, falls es $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ gibt, so dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Eigenschaft (ii) heißt *σ-Additivität*. Interessant ist es, sich Mengenfunktionen anzuschauen, wo in (ii) $\leq$ auftaucht, μ also nur sub-additiv (monoton) ist. Dann heißt μ **Kapazität** oder – was wir später noch kennen lernen – äußeres Maß.

Endliche, additive Mengenfunktionen heißen oft **Inhalt**, σ-additive Mengenfunktionen, die nicht auf σ-Algebren definiert sind, **Prämaß**.

Die Fortsetzung von Maßen ist ein wichtiges Hilfsmittel: Das Lebesgue-Maß etwa definiert man durch

$$\mu([a,b]) := b - a \qquad a, b \in \mathbb{Q}$$

und setzt dann geeignet auf $\sigma(\mathbb{Q})$ fort. Wie das technisch funktioniert, soll nun erläutert werden.

Definition 1.6. Ein Mengensystem $\{\varnothing\} \neq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ heißt *Halbring*, falls

(i) $\varnothing \in \mathscr{H}$

(ii) $A, B \in \mathscr{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{H}$ (durchschnittsstabil)

(iii) Für $A, B \in \mathscr{H}$ gibt es p. d. Mengen $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{H}$, s.d.

$$B \setminus A = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Definition 1.7. Ein nicht-leeres Mengensystem $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ heißt *Ring*, falls

(i) $\varnothing \in \mathscr{R}$

(ii) $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{R}$

(iii) $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow B \setminus A \in \mathscr{R}$.

Ein Ring $\mathscr{R}$ heißt Algebra, falls $\Omega \in \mathscr{R}$. Eine σ-Algebra erfüllt zusätzlich die σ-Additivität.

Beispiel 1.8. $\mathscr{H} = \{(a, b], a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b\}$ ist Halbring und $\sigma(\mathscr{H}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Wir nennen eine Funktion $\mu : \mathscr{H} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ *additiv*, falls für alle paarweise disjunkten $A, B \in \mathscr{H}$ mit $A \cup B \in \mathscr{H}$ gilt, dass

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Lemma 1.9. *Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring mit $\mu : \mathscr{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ additiv. Dann gilt:*

(i) μ ist monoton und subadditiv

(ii) μ ist σ-additiv $\Rightarrow$ μ ist σ-subadditiv

Wir beginnen mit einer Aussage, die wir noch öfter brauchen: Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring und $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{H}$ Dann ist

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} B_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} D_{i,j} \tag{1.10}$$

mit disjunkten Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{H}$ bzw. $(D_{i,j}) \in \mathscr{H}$. Den Beweis hierfür führen wir mit Induktion: Für $n = 2$ folgt das aus der Halbring-Eigenschaft (ii). Gilt die Behauptung für ein n, so ist

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \underbrace{\left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=2}^{n} A_i \right)}_{=\sum_{i=1}^{k} D_i} \setminus A_1 = \sum_{i=1}^{k} D_i \setminus A_1.$$

Da $\mathscr{H}$ ein Halbring ist gibt es $(E_{ij})_{i=1,\ldots,k}$ so dass

$$D_i \setminus A_1 = \sum_{j=1}^{k_i} E_{ij}, \text{ also ist}$$

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} E_{ij}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass μ monoton ist. Seien $A, B \in \mathscr{H}$, $A \subseteq B \Rightarrow$

$$B = A + B \setminus A = A + \sum_{i=1}^{k} D_i,$$

mit $D_i \in \mathscr{H}$, also ist $\mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{k} \mu(D_i) \geq \mu(A)$.

Nun zeigen wir, dass μ auch subadditiv ist: Seien $A_1, \ldots, A_n, \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mu\Big(\sum_{i=1}^{n} B_i\Big) = \mu\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} D_{ij}\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \mu(D_{ij}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \mu(D_{ij}) + \sum \cdots = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Als Letztes fehlt noch μ σ-additiv $\Rightarrow$ μ σ-subadditiv. Dies folgt direkt wie (1.11). □

Beispiel 1.12. Die Rückrichtung gilt **nicht**: Man wähle zum Beispiel den Halbring $\mathscr{H} = \{n : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$. Für zwei unterschiedliche Mengen A und B ist dann $A \cap B$ entweder leer oder enthält nur ein Element. Wir wählen ein σ-subadditives Maß durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & A = \mathbb{N} \\ n^{-2} & A = \{n\}. \end{cases}$$

Allerdings ist dann

$$P\Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\Big) = \sum \frac{1}{n^2} \neq 1 = P(\mathbb{N})$$

und μ ist demnach nicht σ-additiv.

Ist $\mathscr{H}$ ein Halbring, so nennen wir

$$\mathscr{R}(\mathscr{H}) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_i : A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{H} \text{ p. d.}, n \in \mathbb{N} \Big\}$$

den von $\mathscr{H}$ **erzeugten Ring**.

Lemma 1.13. *Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring mit $\mu : \mathscr{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ endlich und additiv. Auf $\mathscr{R}(\mathscr{H})$ definieren wir*

$$\widetilde{\mu}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

für $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{H}$ p. d. Dann ist $\widetilde{\mu}$ die einzige additive Fortsetzung *auf $\mathscr{R}$ die auf $\mathscr{H}$ mit μ übereinstimmt. Außerdem gilt: $\widetilde{\mu}$ σ-additiv $\Leftrightarrow$ μ σ-additiv.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass $\widetilde{\mu}$ wohldefiniert ist. Seien dazu $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ zwei paarweise disjunkte Darstellung der gleichen Menge, also $\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{j=1}^n B_i$. Dann folgt

$$\begin{aligned} A_\mathrm{i} &= \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} A_\mathrm{i} \cap B_\mathrm{j}, \\ B_\mathrm{j} &= \sum_{\mathrm{i}=1}^{m} B_\mathrm{j} \cap A_\mathrm{i}, \\ \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mu : \mathscr{M} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$

- **stetig von unten**, falls $\mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ für $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots,\ A_i \in \mathscr{M}$ für alle $i \geq 1$ und $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{M}$

- mit $\mu(A_1) < \infty$ **stetig von oben**, falls $\mu(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = \lim \mu(A_i)$ für $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, mit $A_i \in \mathscr{M}$

- mit $\mu(A_1) < \infty$ **stetig von oben in** $\varnothing$, falls die obige Eigenschaft $\forall \bigcap_{i=1}^\infty A_1 = \varnothing$ gilt.

Satz 1.14. *Sei $\mathscr{R}$ ein Ring und $\mu : \mathscr{R} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ additiv und $\mu(\varnothing) = 0$,*

(i) *μ ist σ-additiv*

(ii) *μ ist σ-subadditiv*

(iii) *μ ist stetig von unten*

(iv) *μ ist stetig von oben in $\varnothing$*

(v) *μ ist stetig von oben*

Dann gilt: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) und (iv) $\Rightarrow$ (iii) falls $\mu(A) < \infty\ \forall A \in \mathscr{R}$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Lemma 1.9

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{R}$, p. d. so dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) \overset{\mu \text{ monoton}}{\leq} \mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \overset{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(i) $\Rightarrow$ (iii): Seien $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \in \mathscr{R}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$. Dann ist

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \backslash A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \backslash A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{R}$ p. d. und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$. Dann ist $\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{R}\big)_{n\geq 1}$ monoton wachsend, und

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): (Übergang zu Komplementen) Seien $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \in \mathscr{R}$ mit $\bigcap A_i = \varnothing$ und $B_n = A_1 \setminus A_n$. Dann ist $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ und $\bigcup B_i = A_1$ da $\bigcap A_i = \varnothing$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \mu(A_1) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_n) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{n-\infty} \mu(A_n), \end{aligned}$$

so dass $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ folgt. Hierbei haben wir $\mu(A_1) < \infty$. genutzt.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Seien $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq \in \mathscr{R}$ und $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$. Setze $B_n = A_n \setminus A$ und nutze (iv).

(v) $\Rightarrow$ (iv): klar

(iv) $\Rightarrow$ (iii): (mit μ endlich) Seien $A_1 \subset A_2 \subseteq \cdots \in \mathscr{R}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$. Setze $B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A_n$, so dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$, also

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_i). \qquad \square$$

1.2 Die Fortsetzung von Maßen

In diesem Abschnitt wollen wir nun von einem Halbring auf eine σ-Algebra einen Inhalt geeignet zu einem Maß fortsetzen.

Satz 1.15 (Eindeutigkeit). *Sei $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ durchschnittsstabil, es gebe $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$, mit $C_n \in \mathscr{C}$, $n \geq 1$, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \Omega$ und $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$. Weiterhin seien $\mu, \nu : \mathscr{F} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ Maße, so dass $\mu\big|_{\mathscr{C}}$, $\nu\big|_{\mathscr{C}}$ σ-finit sind.*

Dann ist

$$\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(C) = \sigma(C) \quad \forall C \in \mathscr{C}.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ klar

„$\Leftarrow$“ Sei $C \in \mathscr{C}$ mit $\mu(C) = \nu(C) < \infty$ und

$$\mathscr{D}_C := \{A \in \mathscr{F} : \mu(A \cap C) = \sigma(A \cap C\} \supseteq \mathscr{C}.$$

Dann ist $\mathscr{D}_C$ Dynkin-System, denn:

(i) $\Omega \in \mathscr{D}_C$,

(ii) $A, B \in \mathscr{D}_C$,

$$\begin{aligned} A \subseteq B \Rightarrow \mu((B \setminus A) \cap C) &= \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) = \nu(B \cap C) - \nu(A \cap C) \\ &= \nu((B \setminus A) \cap C), \quad \text{also } B \setminus A \in \mathscr{D}_C. \end{aligned}$$

(iii) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \in \mathscr{D}_C$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{D}_C$, so folgt wegen der σ-Stetigkeit von μ, ν

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1 \cap C\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap C) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n \cap C) = \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$$

Dann ist $\mathscr{F} = \sigma(C) = \mathscr{D}_C$, was ebenfalls für alle C_n gilt. Nun betrachten wir $A \in \mathscr{F}$. Dann ist $A \cap C_n \in \mathscr{D}_{C_n}$, also $\mu(A \cap C_n) = \nu(A \cap C_n)$. Wir erhalten

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap C_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap C_n) = \nu(A).$$ □

Wir kommen zu den von C. Carathéodory (1873–1950) eingeführten, zentralen Begriff von einem äußeren Maß. Wie bereits erwähnt, wird lediglich die σ-Additivität durch die σ-Subaddititivtät ersetzt. In der folgenden Definition wird aber auch die Wortgebung äußeres Maß klar, vergleiche Satz 1.18. Alternativ wird für subadditive Mengenfunktionen (auf σ-Algebran) auch der Begriff Kapazität verwendet.

Definition 1.16. Eine Abbildung $\eta : \mathscr{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *äußeres Maß*, falls

(i) $\eta(\varnothing) = 0$

(ii) $A \subseteq B \subseteq \Omega \Rightarrow \eta(A) \leq \eta(B)$ (Monotonie)

(iii) Für $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{P}(\Omega)$ gilt

$$\eta\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta(A_i) \qquad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

Ein äußeres Maß ist natürlich auch subadditiv. Da es auf allen Teilmengen von Ω definiert ist, gibt es zunächst keinen vernünftigen Begriff der Meßbarkeit.

Definition 1.17. Ist η ein äußeres Maß und $A \subseteq \Omega$, so heißt A *σ-messbar*, falls für alle $B \subseteq \Omega$

$$\eta(B) \geq \eta(B \cap A) + \eta(B \cap A^c).$$

Damit ist eine Menge A genau dann messbar, wenn sie **jede** Menge $B \subseteq \Omega$ zerlegt in die disjunkten Mengen $B \cap A$, $B \cap A^c$, auf denen sich η **additiv** verhält.

Satz 1.18. *Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring und μ ein* Inhalt *auf $\mathscr{H}$. Setze für $A \subseteq \Omega$ ($\inf \varnothing = \infty$)*

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathscr{H}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big\}. \tag{1.19}$$

Dann ist μ^* äußeres Maß.

$$(1.19) \quad \Leftrightarrow \qquad \mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathscr{H} \text{ p. d.}, A \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big\}$$

Beweis. Offensichtlich ist μ^* monoton und $\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

Seien $A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$. Ist $\mu(A_n) = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so sind wir fertig.

Sei also $\mu^*(A_n) < \infty \,\forall n$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es (Infimum!) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(B_{nk})_{k\geq 1} \subset \mathscr{H}$, so dass $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}.$$

Nun ist $(B_{nk})_{n,k}$ eine abzählbare Familie von Mengen aus $\mathscr{H}$ und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned}\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) &\le \sum_{n=1}^{\infty}(\mu^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, ist μ^* äußeres Maß. □

Satz 1.20. *Sei μ^* ein äußeres Maß. Dann ist*

$$\mathscr{F}^* := \{A \in \mathscr{P}(\Omega) : A \textit{ ist } \mu^*\textit{-messbar}\}$$

eine σ-Algebra und $\mu^*\big|_{\mathscr{F}^*}$ ein Maß.

Beweis. (i): Wir zeigen zunächst, dass $\mathscr{F}^*$ eine Algebra ist.

$$\Omega \in \mathscr{F}^* \text{ und } A \in \mathscr{F}^* \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}^* \qquad \text{(direkt aus Def. von } \mu^*\text{-messbar)}$$

Seien $A, B \in \mathscr{F}^*$ und $C \subset \Omega$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &\ge \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \qquad (A \in \mathscr{F}*) \\ &\ge \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c \cap B) + \mu^*(C \cap A^c \cap B^c) \qquad (B \in \mathscr{F}^*) \\ &\ge \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c)\end{aligned}$$

und somit sind $A \cup B \in \mathscr{F}^*$. Sind A, B auch noch paarweise disjunkt, so folgt

$$\mu^*(C) \ge \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c). \tag{1.21}$$

(ii) Nun zeigen wir: Sind $(A_n)_{n\ge1} A_i \in \mathscr{F}^*$ p. d. $\Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathscr{F}^*$ und μ^* ist σ-additiv: Zunächst folgt $\sum_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}^*$ aus (i). Für jedes $C \subseteq \Omega$ gilt

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &\ge \mu^*\Big(C \cap \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)\Big) + \mu^*\Big(C \cap \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)^c\Big) \\ &\ge \sum_{i=1}^{n} \mu^*(C \cap A_i) + \mu^*(C \cap A^c). \qquad \text{(Monotonie \& (1.21))}\end{aligned}$$

Dies gilt für alle n, also folgt

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(C \cap A_i) + \mu^*(C \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \geq \mu^*(C)\end{aligned}$$

wegen der Sub-σ-Additivität. Es folgt $A \in \mathscr{F}^*$ und mit $A = C$ die σ-Additivität von μ^*. □

Theorem 1.22 (Fortsetzungssatz)**.** Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring und $\mu : \mathscr{H} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ein Inhalt.

(i) Dann sind alle Mengen aus $\mathscr{H}$ μ^*-messbar.

(ii) Ist μ σ-additiv, so gilt $\mu^*\big|_{\mathscr{H}} = \mu$.

(iii) Ist μ nicht σ-additiv, so gibt es $A \in \mathscr{H}$, so dass $\mu^*(A) < \mu(A)$.

Insbesondere ist $\mu^*\big|_{\mathscr{F}^*}$ Maß und damit auch $\mu^*\big|_{\sigma(\mathscr{H})}$.

Beweis. (i) Sei $A \in \mathscr{H}$ und $C \subseteq \Omega$ mit $\mu^*(C) < \infty$ (für $\mu^*(C) = \infty$ ist nicht zu zeigen) und $(B_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{R}(\mathscr{H})$ so, dass $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$ und $\mu^*(C) + \varepsilon \geq \sum \widetilde{\mu}(B_n)$ (existiert, da $\mu^*(C) < \infty$).

Wir betrachten den auf $\mathscr{R}(\mathscr{H})$ erzeugten Inhalt $\widetilde{\mu}$.

$$\begin{aligned}\mu^*(C) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(B_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(B_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c).\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $A \in \mathscr{F}^*$.

(ii) Sei $A \in \mathscr{H}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{H}$, so dass $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n$ und (Def. μ^*)

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \underset{\sigma\text{-Sub.-Add.}}{\geq} \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \geq \mu(A) \geq \mu^*(A)$$

und es folgt $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(iii) Ist μ nicht σ-additiv, so gibt es p. d. $(A_n) \subseteq \mathscr{H}$, $A = \sum_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{H}$ mit

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_n\Big) \neq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Allerdings ist stets (μ Inhalt) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$, also $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu(A)$. Nun ist $\mu^*(A_n) = \mu(A)$ und μ^* σ-additiv, also $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A) < \mu(A)$. □

Man kann noch zeigen, dass

$$\mathscr{F}^* = \{A \setminus N : A \in \sigma(\mathscr{H}), N \in \Omega, \mu^*(N) = 0\}.$$

1.3 Maße auf $\mathbb{R}$

Wir können nun das Lebesgue-Maß λ eindeutig auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ definieren durch

$$\lambda((a,b]) = b - a, \qquad a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a \leq b.$$

Wir setzen hierbei $(a,a] = \varnothing$. Ebenso erhalten wir eine Charakterisierung aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Satz 1.23. *Eine Funktion $P : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß genau dann, wenn es eine wachsende rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ gibt, so dass*

$$P((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b.$$

Offensichtlich ist P eindeutig durch F bestimmt!

Beweis. **„$\Rightarrow$ “:** klar

„$\Leftarrow$ “: Wir zeigen, dass P eine σ-additive Mengenfunktion auf dem Erzeugenden-Halbring

$$\mathscr{H} = \{(a,b] : a \leq b, \ a, b \in \mathbb{Q}\} \text{ ist.}$$

Seien also $\{(a_i, b_i] : i \geq 1\}$ paarweise disjunkt (p. d.) und $\sum_{i \geq 1}(a_i, b_i] = (a,b]$. Ohne Einschränkung können wir umordnen in $\{(c_i, c_{i-1}]\}$ mit $\sum_{i \geq 1}(c_i, c_{i-1}] = (a,b]$ und $c_1 \geq c_2 \geq \ldots$ Dann gilt $c_i \to a$ und $c_1 = b$. (!)

Da F rechtsstetig ist, folgt

$$\begin{aligned} P((a,b]) &= F(b) - F(a) = F(c_1) - \lim_{n \to \infty} F(c_n) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} F(c_n) - F(c_{n-1}) = \sum_{n=2}^{\infty} P((c_n, c_{n-1}]). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Theorem 1.22. $\square$

Für uns wichtig werden Verteilungen, also Bildmaße sein.

Definition 1.24. Ein Tripel $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ heißt *Maßraum*, falls $\mathscr{F}$ σ-Algebra und μ Maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$ ist.

Das Paar $(\Omega, \mathscr{F})$ bezeichnen wir als *messbaren Raum*.

Definition 1.25. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathscr{F}'$ eine σ-Algebra auf Ω'. Eine Funktion $f : \Omega \to \Omega'$ heißt *$\mathscr{F}$-$\mathscr{F}'$-messbar*, falls

$$f^{-1}(A) \in \mathscr{F} \text{ für alle } A \in \mathscr{F}'.$$

Für ein solches f heißt $f_*\mu : \mathscr{F}' \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{0\}$, definiert durch

$$f_*\mu(A') = \mu(f^{-1}(A')) = \mu(\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'), \qquad A' \in \mathscr{F}'$$

Bildmaß von μ unter f.

Man zeigt leicht, dass $f_*\mu$ wieder ein Maß ist. $f_*\mu$ wird oft auch als $f_*(\mu)$, $\mu \circ f^{-1}$ notiert und *push-forward* genannt.

Die **von f erzeugte** σ-Algebra $f^{-1}(\mathscr{F}')$ ist in der Tat eine σ-Algebra. Ebenso gilt für $\sigma(\mathscr{C}') = \mathscr{F}'$, dass

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')).$$

Ist $(\Omega', \mathscr{F}') = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, so heißt f **reellwertig** und ist f $\mathscr{F}$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar, so nennen wir f **Borel-messbar**, oder oft auch einfach messbar.

Messbarkeit ist ein wichtiger Begriff, so dass wir ein paar Rechenregeln wiederholen. Wir schreiben $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Lemma 1.26. *Seien $(\Omega, \mathscr{F})$, $(\Omega', \mathscr{F}')$, $(\Omega'', \mathscr{F}'')$ Maßräume auf $f : \Omega \to \Omega'; g : \Omega' \to \Omega''$.*

(i) $\mathscr{F}' = \sigma(\mathscr{C}') \Rightarrow f$ *messbar* $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{C}') \subseteq \mathscr{F}$

(ii) f, g *messbar* $\Rightarrow f \circ g$ *messbar*

(iii) *stetige Abbildungen sind messbar (auf topologischen Räumen !) bzgl. der Borel-σ-Algebren.*

(iv) *Eine reellwertige Funktion f ist genau dann Borel-messbar, falls*

$$\{\omega : f(\omega) \leq x\} \in \mathscr{F} \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

(v) $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ *ist messbar* $\Leftrightarrow A_1, \dots, A_n \in \mathscr{F}$.

(vi) $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar* $\Rightarrow f \cdot g, a \cdot f + b \cdot g, \frac{f}{g} \mathbb{1}_{\{g \neq 0\}}$ *messbar* $(a, b \in \mathbb{R})$

(vii) $f_1, f_2, \cdots : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar* $\Rightarrow \sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n$ *sind messbar.*

Den Beweis kann man als eine Übungsaufgabe führen. Am interessantesten ist wohl der Beweis für die Messbarkeit von $\sup_n f_n$:

$$\{\omega : \sup f_n(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n \geq 1} \{\omega : f_n(\omega) \leq x\} \in \mathscr{F}.$$

Eine wichtige Eigenschaft nicht-negativer, messbarer Funktionen ist, dass sie stets durch einfache Funktionen approximierbar sind: Wir setzen:

$$A_{j,n} = \begin{cases} \{\frac{j}{2^n} \leq f \leq \frac{j+1}{2^n}\}, & j = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{f \geq n\}, & j = n \cdot 2^n \end{cases}.$$

Mit

$$f_n = \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} \mathbb{1}_{\{A_{j,n}\}}$$

erhalten wir die gewünschte, monotone Approximation, $f_n \uparrow f \geq 0$. Dies ist der Schlüssel zum Integral! Wir definieren für einfache Funktionen

$$\int f d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i)$$

und für messbare, nicht-negative Funktionen und $f_n \uparrow f$

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \sup\left\{ \int g d\mu : g \text{ einfach und } 0 \le g \le f \right\}.$$

Dieses Integral können wir fortsetzten, falls mindestens ein Integral $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$ endlich ist. Dann definieren wir

$$\mathscr{L}^1(\mu) := \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{Q}} : \int |f| d\mu < \infty \right\} \qquad \text{(und analog } \mathscr{L}^p\text{)}$$

Leider hat dieser Raum schlechte Trennungseigenschaften: Gibt es eine nichtleere Null-Menge, so gibt es immer verschiedene meßbare Funktionen, die den Abstand Null haben. Um das zu beheben, und letzten Endes Banach-Räume zu erhalten, betrachtet man Äquivalenzklassen, siehe auch Abschnitt VI.2 in Elstrodt(2013). Auch im Buch Bauer(1990) gibt es ein kleines Kapitel über L^p-Räume.

Auf den messbaren Funktionen kann man folgende Äquivalenzrelation einführen: $f \sim g$ falls $\mu(f = g) = 1$. Die hierdurch erhaltenen Äquivalenzklassen definieren die L^p-Räume. In der Notation machen wir dies durch die Unterscheidung $\mathscr{L}$ und L kenntlich. Im Folgenden kürzt f. ü. fast überall ab, etwa $f \le g$ f. ü. ist gleichbedeutend mit $\mu(\omega \in \Omega : f > g) = 0$.

Satz 1.27. *Seien $f, g, f_1, f_2, \dots$ meßbar. Dann gilt:*

(i) $f \le g$ *f. ü.* $\Rightarrow \int f d\mu \le \int g d\mu$

(ii) $|\int f d\mu| \le \int |f| d\mu$ *(Dreiecksungleichung)*

(iii) $\int (af + bg) d\mu = \int f d\mu + b \int g d\mu$ *(Linearität)*

(iv) $f = 0$ *f. ü.* $\Rightarrow \int f d\mu = 0$

(v) $\int f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty$ *f. ü.*

Als Übung beweisen wir den Substitutionssatz

Satz 1.28. $g \in \mathscr{L}^1(f_*\mu) \Rightarrow g \circ f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *und*

$$\int g \circ f d\mu = \int g \, d(f_*\mu).$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für einfache nicht-negative g zu zeigen. Der allgemeine Fall folgt durch Approximation.

Sei $g = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i} \Rightarrow g \circ f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{\{f \in A_i\}}$, also

$$\int g \circ f d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(f \in A_i) = \sum_{i=12}^n c_i f_* \mu(A_i) = \int gd(f_*\mu). \qquad \square$$

Äußerst wichtig sind die folgenden Konvergenzsätze.

Theorem 1.29 (Monotone Konvergenz)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ Maßraum, $f_n \geq 0$ und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \uparrow f$ f. ü. $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Folgt direkt aus der monotonen Konvergenz (Teil (vi) in 1.27) mit

$$g_n = (f - f_n)\mathbb{1}_{\{\omega\in\Omega: f_n(\omega)\uparrow f(\omega)\}}. \qquad \square$$

Bemerkung 1.30. Auf die Forderung $f \geq 0$ kann nicht verzichtet werden. Betrachten wir das Lebesgue-Maß und die Funktionenfolge

$$f_n(x) = -\mathbb{1}_{\{x\leq -n\}},$$

so konvergiert $f_n \uparrow f = 0$ monoton, aber $\int f_n d\mu = -\infty$ und $\int f d\mu = 0$.

Theorem 1.31 (Fatou)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ Maßraum $f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \geq 0$. Dann gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Beweis. Ist n fest, so gilt für alle $j \geq n$, dass $f_j \geq \inf_{k\geq n} f_k$. Wegen der Monotonie des Integrals erhält man, dass

$$\inf_{j\geq n} \int f_j d\mu \geq \int \inf_{k\geq n} f_k d\mu.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \inf_{k\geq n} f_k d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

wegen monotoner Konvergenz $(\inf_{k\geq n} f_k \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n)$. $\square$

Theorem 1.32 (Majorisierte Konvergenz)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ Maßraum und $f, g, (f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Sei $|f_n| \leq g$ f. ü. mit $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Zunächst sei ohne Einschränkung $|f_n| \leq g \;\; \forall \omega \in \Omega$. Die Idee ist, Fatou auf $g+f$, $g-f$ anzuwenden, wobei $g+f_n \geq 0$ und $g - f_n \geq 0$ aus der Voraussetzung folgt. Es gilt, dass

(1) $\displaystyle\int (g+f)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g+f_n)d\mu = \int g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$

(2) $\displaystyle\int (g-f)d\mu \leq \int g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu$, indem wir Fatou auf $(g - f_n)$ anwenden.

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir, dass

$$\int f d\mu \overset{(1)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \overset{(2)}{\leq} \int f d\mu.$$ □

Wir erinnern kurz an die $L^p(\mu)$-Räume

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^p(\mu) &= \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar mit } \|f\|_p < \infty\} \text{ und} \\ \|f\|_p &= \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{1/p}. \\ \|f\|_\infty &= \inf\{K : \mu(|f| > K) = 0\}.\end{aligned}$$

Es gilt für messbare f, g, dass

(i) $0 < p, q, r \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$: $\quad \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder-Ungleichung)

(ii) $1 \leq p \leq \infty$: $\quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski-Ungleichung)

Definition 1.33 (Konvergenz im p-ten Mittel)**.** Eine Folge $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{L}^p(\mu)$ **konvergiert im p-ten Mittel**, falls

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Wir schreiben

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}^p(\mu)} f.$$

Konvergiert eine Folge im p-ten Mittel, so auch im q-ten Mittel, falls $q < p$. (Hölder) Außerdem ist $\mathscr{L}^p(\mu)$, $p \geq 1$ **vollständig** (jede Cauchy-Folge konvergiert); das ist der berühmte Satz von Riesz-Fischer, siehe etwa Satz VI.2.5 in Elstrodt(2013). Allerdings ist $\mathscr{L}^p(\mu)$ kein (!) normierter Raum, denn $N_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ ist lediglich eine Halbnorm. Dies können wir, wie bereits erwähnt, beheben durch Übergang zu Äquivalenzklassen: $L^p(\mu)$ ist ein normierter und vollständer Rau, und damit ein Banach-Raum.

1.4 Hilberträume

Auf dem $\mathscr{L}^2(\mu)$ hat man eine besondere Struktur, denn dieser Raum ist sogar ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int f\, g\, d\mu.$$

Dann lassen sich die allgemeinen Resultate anwenden (siehe Werner(2000)).

Lemma 1.34 (Parallelogrammidentität)**.** *Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Hilbertraum falls $\forall\, f, g$ gilt, dass*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Beweis. Siehe Werner(2000), Satz V.1.6. □

Satz 1.35. *Sei M ein abgeschlossener, linearer Unterraum des Hilbertraums H und $f \in H$. Dann gibt es genau ein $g \in M$, $h \perp M$, so dass*

$$f = g + h.$$

Beweis. Siehe Werner(2000), Theorem V.3.4. □

Satz 1.36 (Riesz-Fréchet)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $F : H \to \mathbb{R}$. F ist genau dann stetig und linear, falls es ein $f \in H$ gibt, so dass*

$$F(h) = \langle f, h\rangle \qquad \forall\, h \in H.$$

Hierbei ist f eindeutig.

Beweis. Siehe Werner(2000), V.3.6. □

1.5 Signierte Maße und der Satz von Radon-Nikodým

Wir wenden uns kurz diesem allgemeineren Begriff zu. Vorstellen kann man sich ein signiertes Maß als Ladungsverteilung mit positiver und negativer Ladung. Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein fester messbarer Raum.

Definition 1.37. Eine Abbildung $\nu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ heißt *signiertes Maß*, falls

(i) $\nu(\varnothing) = 0$

(ii) $\nu(\mathscr{F}) = \{\nu(F) : F \in \mathscr{F}\}$ ist entweder Teilmenge von $(-\infty, +\infty]$ oder von $[-\infty, \infty)$.

(iii) Sind $(A_n) \in \mathscr{F}$ p. d., so gilt

$$\nu\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Beispiel 1.38. Hat man Maße μ_1, μ_2, wobei eines davon endlich ist, so ist $\nu = \mu_1 - \mu_2$ signiertes Maß. In der Tat hat jedes signierte Maß eine solche Gestalt und μ_1, μ_2 sind bei geeignet „minimaler" Wahl sogar eindeutig.

Definition 1.39. Ist ν signiertes Maß und $F \in \mathscr{F}$.

(i) F heißt ν-*positiv*, falls $\nu(A) \geq 0$ für alle $\mathscr{F} \ni A \subseteq F$

(ii) F heißt ν-*negativ*, falls $\nu(A) \leq 0$ für alle $\mathscr{F} \ni A \subseteq F$

(iii) F heißt ν-*Nullmenge*, falls $\nu(A) = 0$ für alle $\mathscr{F} \ni A \subseteq F$

Lemma 1.40. *Ist $\nu : \mathscr{F} \to [-\infty, \infty)$ signiertes Maß und $A \in \mathscr{F}$ mit $\nu(A) \neq -\infty \Rightarrow$ es existiert eine positive Menge P mit $\nu(P) \geq \nu(A)$.*

Beweis. (i) Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\mathscr{F} \ni A_\varepsilon \subseteq A$ mit $\nu(A_\varepsilon) \geq \nu(A)$ und $\nu(B) \geq -\varepsilon$ für alle $\mathscr{F} \ni B \subseteq A_\varepsilon$.

Durch Widerspruch: Angenommen, es existiert $\varepsilon > 0$, so dass die Behauptung falsch ist. Dann enthält jede messbare Menge $C \subseteq A$ mit $\nu(C) \supseteq \nu(A)$ ein $B \in \mathscr{F}$, so dass $\nu(B) \leq -\varepsilon$. Wir erhalten eine Folge $B_1 \subseteq A$, $B_k \subseteq A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1})$ mit $\nu(B_k) \leq -\varepsilon$, $k \geq 1 \Rightarrow \nu(\sum B_k) = -\infty$. ↯

Wir erhalten eine fallende Folge $(A_{1/n}) \subseteq \mathscr{F}$ und $P := \bigcap A_{1/n}$ ist positiv sowie $\nu(A_{1/n}) \geq \nu(A)$, also auch $\lim_{n\to\infty} \nu(A_{1/n}) = \nu(P)$. □

Satz 1.41 (Hahn-Zerlegung)**.** *Zu jedem signierten Maß ν existiert eine disjunkte Zerlegung $\Omega = P + N$, in eine ν-positive Menge $P \in \mathscr{F}$ und eine ν-negative Menge $N \in \mathscr{F}$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\nu(\mathscr{F}) \subseteq [-\infty, \infty)$ und $\alpha = \sup\{\nu(A) : A \in \mathscr{F}\}$. Nach Lemma 1.4 gibt es eine Folge positiver Mengen (A_n) mit $\nu(A_n) \to \alpha$. Dann ist $P = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathscr{F}$ positiv und $\nu(P) \geq \nu(A_n)$, also $\nu(P) = \alpha$. Außerdem ist nach Voraussetzung $\nu(P) < \infty$ und somit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nun ist $N = P^c$ negativ: Gäbe es $B \subset N$ mit $N(B) > 0$, so wäre $\nu(P \cup B) > \alpha$. □

Man sieht leicht, dass diese Zerlegung **eindeutig** bis auf Nullmengen ist.

Für ein signiertes Maß ν mit Hahn-Zerlegung $\Omega = P + N$ heißen

$$\left.\begin{array}{ll} \nu^+(A) & := \nu(A \cap P) \\ \nu^-(A) & := \nu(A \cap N) \end{array}\right\}, \qquad A \in \mathscr{F}$$

positive (negative) Variation von ν. Da P und N bis auf Nullmengen eindeutig sind, ist $\nu^{+/-}$ wohldefiniert.

Definition 1.42. Zwei signierte Maße μ, ν heißen *singulär* (und wir schreiben $\mu \perp \nu$), falls $\Omega = A + A^c$, $A \in \mathscr{F}$ mit $\mu(A) = 0$, $\nu(A^c) = 0$.

Satz 1.43 (Jordan-Zerlegung)**.** *Jedes signierte Maß ν erfüllt $\nu = \nu^+ + \nu^-$ mit $\nu^+ \perp \nu^-$. Diese Zerlegung ist* minimal, *d.h.: ist $\nu = \varrho - \sigma$ mit Maßen ϱ, σ, von denen mindestens eines endlich ist, so ist $\nu^+ \leq \varrho$, $\nu^- \leq \sigma$.*

Beweis. Es bleibt lediglich die Minimalität:

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P) = \varrho(A \cap P) - \sigma(A \cap P) \leq \varrho(A \cap P) \leq \varrho(A).$$ □

Beispiel 1.44. Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ quasi-integrierbar. Dann ist durch

$$d\mu = f dx$$

ein signiertes Maß definiert und $P = f^{-1}([0, \infty])$, $N = f^{-1}([-\infty, 0))$.

Definition 1.45. Wieder betrachten wir den festen meßbaren Raum $(\Omega, \mathscr{F})$.

(i) Das (signierte) Maß ν heißt *absolut stetig* bzgl. des Maßes μ, falls

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \qquad \text{für alle } A \in \mathscr{F}.$$

Dann schreiben wir $\nu \ll \mu$. Gilt zusätzlich $\mu \ll \nu$, so heißen μ und ν *äquivalent* und wir schreiben $\mu \sim \nu$.

(ii) Gilt

$$\nu(A) = \int_A f d\mu,$$

für alle $A \in \mathscr{F}$, so heißt f *Dichte* von ν bzgl. μ und wir schreiben

$$\frac{d\nu}{d\mu} = f \quad \text{oder} \quad d\nu = f d\mu.$$

Der Schlüssel zu dem Satz von Radon-Nikodým ist folgendes Lemma:

Lemma 1.46. *Sind ν, ϱ endliche Maße mit $\nu \leq \varrho$, so gibt es seine messbare Funktion $h : \Omega \to [0,1]$ mit*

$$d\nu = h\, d\varrho. \tag{1.47}$$

Beweis. Die Voraussetzungen ergeben, dass $L^2(\varrho) \subseteq L^2(\nu) \subseteq L^1(\nu)$. Damit ist die Abbildung $f \mapsto \int_\Omega f d\nu$, mit $f \in L^2(\varrho)$ wohldefiniert und stetig (da L^2 vollständig ist). Außerdem ist $L^2(\varrho)$ ein Hilbertraum. Nach Satz 1.36 von Riesz-Fréchet gibt es $h \in L^2(\varrho)$, so dass

$$\int f d\nu = \langle f, h \rangle_\varrho = \int f h\, d\varrho.$$

Dies gilt für alle $f \in L^2(\varrho)$, insbesondere für $f = 1_F$, $F \in \mathscr{F}$. Man sieht direkt, dass $h(\Omega) \in [0,1]$ ϱ-f.s. □

Wir sammeln einige technische Eigenschaften

Lemma 1.48. *Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$ und $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar.*

(i) *Sind $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und gilt*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu, \qquad A \in \mathscr{F}, \tag{1.49}$$

so folgt $f \leq g$ μ-fast sicher.

(ii) *Ist ν σ-finit und $d\nu = f d\mu = g d\mu$, so folgt*

$$f = g \qquad \mu\text{-f.s.}$$

(iii) *Ist μ σ-finit und sind f, g quasi-integrierbar mit $d\nu = f d\mu = g d\mu$, so folgt*

$$f = g \qquad \mu\text{-f.s.}$$

(iv) *Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt*

$$\int g \cdot (f d\mu) = \int (f \cdot g) d\mu.$$

Beweis. (i) Wir setzen $A_n = \{f > g + \frac{1}{n}\} \in \mathscr{F}$, so dass $A_n \uparrow A = \{f > g\} \in \mathscr{F}$. Wir erhalten, dass

$$\int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \Big(g + \frac{1}{n}\Big) d\mu = \int_{A_n} g d\mu + \frac{1}{n}\mu(A_n) \geq \int_{A_n} f d\mu + \frac{1}{n}\mu(A_n),$$

also $\mu(A_n) = 0$ (da $\int f d\mu < \infty$). Da aber $A_n \uparrow A$, folgt auch $\mu(A) = 0$. Gilt in (1.49) sogar Gleichheit, so erhalten wir damit auch $f = g$ μ-fast sicher.

(ii) Da ν σ-finit ist, gibt es $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}$, so dass $\bigcup_{n \geq 1} \Omega_n = \Omega$ und $\nu(\Omega_n) < \infty$.

Wir setzen $A_n = \Omega_n \cap \{f < g\} \Rightarrow \int_{A_n} (f - g) d\mu = v(A_n) - \nu(A_n) = 0$, also $\mu(A_n) = 0$.

Damit ist

$$\mu(f > g) = \mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.$$

(iii) Wir zeigen die Behauptung für $\leq$ - das Resultat folgt durch Vertauschung von f und g. Aus Symmetriegründen können wir f^- integrierbar annehmen. Dann ist auch g^- integrierbar. Sei (Ω_n) eine Folge wachsender, messbarer Mengen mit $\mu(\Omega_n) < \infty$ und $\Omega_n \to \Omega$. Wir setzen

$$A_n = \Omega_n \cap \{g \leq n\} \uparrow \{g < \infty\} =: A.$$

Dann ist $\mu(A_n) < \infty$ und $g\mathbb{1}_{A_n} \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Für alle $F \in \mathscr{F}$ folgt, dass

$$-\infty < \int_F f\,\mathbb{1}_{A_n} d\mu \leq \int_F g\,\mathbb{1}_{A_n} d\mu < \infty.$$

Mit $F = \Omega$ erhalten wir, dass auch $f\mathbb{1}_{A_n} \in \mathscr{L}^1(\mu)$ ist. Nach Teil (i) folgt, dass $f\mathbb{1}_{A_n} \leq g\mathbb{1}_{A_n}$ μ-fast sicher (und zwar für alle n).

Mit $n \to \infty$ folgt, dass $f\mathbb{1}_{\{g<\infty\}} \leq g\mathbb{1}_{\{g<\infty\}}$ μ-fast sicher. Auf der Menge $A^c\{g = \infty\}$ gilt das natürlich auch und die Behauptung folgt.

(iv) Offensichtlich ist für $g = 1_A$

$$\int g(f \cdot d\mu) = \int_A f d\mu = \int (1_A \cdot f) d\mu.$$

Die übliche Approximation von messbaren g liefert das Resultat.

□

Beispiel 1.50. Natürlich kennen wir bereits Dichten bzgl. des Lebesgue-Maßes (Normalverteilungen etc.). Jede diskrete Verteilung hat allerdings auch eine Dichte bezüglich des Zählmaßes

$$\mu = \sum_{n\geq 1} \delta_{x_n}$$

mit dem Dirac-Maß $\delta_{x_n}(A) := \mathbb{1}_A(x_n)$ und geeignet gewählten (x_n).

Satz 1.51 (Radon-Nikodým). *Es sei μ σ-finites Maß und ν ein signiertes Maß, so dass $\nu \ll \mu$. Dann hat ν eine (μ-f.s.) eindeutige Dichte $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ bzgl. μ.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus (f, g quasi-i.b., μ σ-finit) Lemma 1.48. Mit der Jordan-Zerlegung ist $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+ \ll \mu$ und $\nu^- \ll \mu$, so dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass ν ein Maß ist.

(1) μ, ν endlich $\Rightarrow$
Wir betrachten $\tau = \mu + \nu$. Nach Lemma 1.46 existieren h, g so dass $d\mu = g d\tau$ und $d\nu = h d\tau$. Wir setzen $N = \{g = 0\}$, so dass $\mu(N) = 0$, also auch $\nu(N) = 0$, da $\nu \ll \mu$.

Definiere

$$f(x) := \frac{h(x)}{g(x)} \mathbb{1}_{\{x \in N\}}$$

$$\Rightarrow \qquad \nu(A) = \nu(A \cap N^c) = \int_{A\cap N^c} h d\tau = \int_{A\cap N^c} f d\mu = \int_A f d\mu$$

(2) μ endlich $\Rightarrow$ Setze

$$\alpha = \sup\{\mu(B) : B \in \mathscr{F}, \nu(B) < \infty\} \qquad (< \infty).$$

Dann gibt es $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}$ mit $\nu(B_n) < \infty$, $\mu(B_n) \to \alpha$, also $\mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n) = \alpha$.

Für $A \in \mathscr{F}$, $A \subseteq (\bigcup B_n)^c$, $\nu(A) < \infty$ gilt

$$\alpha + \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n \cup A) \leq \alpha,$$

also $\mu(A) = 0$ und somit $\nu(A) = 0$.

Wir erhalten $A \subseteq (\bigcup B_n)^c \Rightarrow \mu(A) = \nu(A) = 0$ oder $\mu(A) > 0$, $\nu(A) = \infty$.

Es ist $E_n := B_n \setminus B_{n-1}$, $E_1 = B_1$, $E := \bigcup E_n$ eine Folge p. d. Mengen mit $\nu(E_n) < \infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists f_n$ mit $d(\mathbb{1}_{E_n}\nu) = f_n d\mu$

$$\begin{aligned} \nu &= \Big(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{E_n} + \mathbb{1}_{E^c}\Big) \cdot \nu \\ &= \sum_{n\geq 1} f_n d\mu + \infty \cdot \mathbb{1}_{E_c} d\mu = \Big(\sum_{n\geq 1} f_n + \infty \cdot \mathbb{1}_{E^c}\Big) d\mu \end{aligned}$$

(3) μ σ-finit
$\Rightarrow$ Es existieren p. d. (Ω_n), $\mu(\Omega_n) < \infty$, so dass $\Omega = \sum_{n\geq 1} \Omega_n$.
Wir definieren $d\mu_n = \mathbb{1}_{\Omega_n} d\mu$, $\nu_n = \mathbb{1}_{\Omega_n} d\nu$
und wenden (2) an $\Rightarrow d\nu_n = f_n d\mu_n$ und $\sum f_n \mathbb{1}_{A_n}$ ist Dichte von ν bzgl. μ. $\square$

Beispiel 1.52. Auf σ-Finitheit kann nicht verzichtet werden: $\Omega \neq \varnothing$, $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(\Omega) = \infty$, $\nu(\varnothing) = 0$, $\nu(\Omega) = \mathbb{1}$, so ist $\nu \ll \mu$, aber es gibt keine Dichte $(c \cdot \infty \neq \mathbb{1})$.

Satz 1.53 (Lebesgue-Zerlegung)**.** *Ist μ σ-finites Maß und ν σ-finites, signiertes Maß, so gibt es genau eine Zerlegung*

$$\nu = \varrho + \sigma$$

mit signierten Maßen ϱ, ν, so dass $\varrho \ll \mu$, $\sigma \perp \mu$.

Beweis. Wieder genügt es nach Satz 1.43, Maße zu betrachten.

Wir setzen $\tau = \mu + \nu \underset{\text{Satz 1.51}}{\Rightarrow} \exists\, g$ so dass $d\mu = g d\tau$.

Definiere $N = \{g = 0\}$ und

$$\varrho(A) = \nu(A \cap N^c), \quad \sigma(A) = \nu(A \cap N), \qquad A \in \mathscr{F}. \qquad \square$$

Eindeutigkeit: ÜA

1.6 Produkträume

Die grundlegende Idee dieses Kapitels ist es auf dem Raum $\Omega_1 \times \Omega_2$ ein Maß einzuführen - zunächst werden wir zeigen, dass Mengen vom Typ $A_1 \times A_2$ auf diesem Raum eine σ-Algebra erzeugen und sich darauf ein Maß konstruieren lässt, was die Masse $\mu(A_1) \cdot \mu(A_2)$ vergibt.

Für uns interessant werden polnische Räume sein, da auf ihnen die zentralen Grenzwertsätze der Stochastik gelten werden.[3]

Definition 1.54. Ein topologischer Raum $(\Omega, \mathscr{O})$ heißt **polnisch**, falls

(i) es eine abzählbare Menge $\Omega' \subseteq \Omega$ gibt, so dass $\overline{\Omega}' = \Omega$,

(ii) er vollständig metrisierbar ist.[4]

Beispiel 1.55. (i) $(\mathscr{C}[0,1], \sup)$ ist polnisch,

(ii) $(\mathscr{C}[0,\infty), d)$ mit

$$d(f,g) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(f,g)}{1 + d_k(f,g)} \qquad \text{mit } d_k = \sup_{[0,k]} |f-g|$$

ist polnisch (Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta) und

(iii) jeder **kompakte** metrische Raum ist polnisch.

Für eine Familie $(\Omega_i)_{i\in I}$ von Mengen heißt

$$\bigtimes_{i \in I} \Omega_i := \{(\omega_i)_{i\in I} : \omega_i \in \Omega_i\}$$

Produktraum der $(\Omega_i)_{i\in J}$. Für $H \subseteq J \subseteq I$ definieren wir die **Projektionen**

$$\pi_H^J : \bigtimes_{j\in J} \Omega_j \to \bigtimes_{h \in H} \Omega_h \qquad \text{durch}$$

$$\pi_H^J((\omega_j)_{j\in I}) = (\omega_h)_{h\in H}.$$

Außerdem schreiben wir $\pi_H^I = \pi_H$ und $\pi_i = \pi_{\{i\}}$, $i \in I$.

[3] Für einen topologischen Raum $(\Omega, \mathscr{O})$ mit $A \subseteq \Omega$ setzen wir

$$A^o := \bigcup \{O \subseteq A : O \in \mathscr{O}\} \qquad \text{(Innere von } A)$$
$$\overline{A} := \bigcap \{F \supseteq A : F^c \in \mathscr{O}\} \qquad \text{(Abschluss von } A)$$

Definition 1.56. Ist $(\Omega_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, so heißt die von

$$\Big\{ \bigtimes_{j\in J} A_j \times \bigtimes_{i\in I\setminus J} \Omega_i : J \subseteq I, J \text{ endlich}\Big\}$$

erzeugte Topologie *Produkttopologie* auf $\Omega = \bigtimes_{i\in I} \Omega_i$.

Bezüglich der Produkttopologie $\mathscr{O}$ sind alle Projektionen π_i, $i \in J$ stetig:

$$\pi_i^{-1}(A_i) = A_i \times \bigtimes_{j\in I\setminus\{i\}} \Omega_j \in \Omega, \qquad A_i \in \mathscr{O}_i.$$

Besonders schöne Eigenschaften erhält man unter Abzählbarkeit.

Satz 1.57. *Sei $(\Omega_i, \mathscr{O}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie polnischer Räume. Dann ist der Produktraum versehen mit der Produkttopologie wieder polnisch.*

Beweis. Da Ω_i separabel ist, gibt es abzählbare viele $\Omega_i' = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \subseteq \Omega_i$, so dass $\overline{\Omega_i'} = \Omega_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit d_i bezeichnen wir die vollständige Metrik, die $\mathscr{O}_i$ erzeugt. Für $\omega, \omega' \in \Omega = \bigtimes_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ wird durch

$$d(\omega, \omega') = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i}(d_i(\omega_i, \omega_i') \wedge 1)$$

eine vollständige Metrik auf Ω definiert, die die Produkt-Topologie $\mathscr{O}$ erzeugt.

Für $\omega' \in \bigtimes_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i'$ ist

$$B_{\omega'} := \Big\{\omega \in \bigtimes_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i' : \omega_i \neq \omega_i' \text{ für endlich viele } i \in \mathbb{N}\Big\}$$

abzählbar und dicht in Ω und die Behauptung folgt. □

Definition 1.58. Für eine Familie $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)_{i\in I}$ von Maßräumen heißt die σ-Algebra

$$\bigotimes_{i\in I} \mathscr{F}_i := \sigma\Big(\Big\{ \bigtimes_{j\in J} A_j \times \bigtimes_{i\in I\setminus J} \Omega_i : J \subseteq I, I \text{ endlich}, A_i \in \mathscr{F}_i\Big\}\Big)$$

die Produkt-σ-Algebra auf $\Omega = \bigtimes_{i\in J} \Omega_i$. Ist $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}_j$, so schreiben wir auch $\mathscr{F}^I = \bigotimes_{i\in I} \mathscr{F}$.

Wieder sind die Projektionen verträglich mit der Konstruktion: Da

$$\pi_i^{-1}(A_i) = A_i \times \bigtimes_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_j \in \bigotimes_{i \in I} \mathscr{F}_i,$$

ist π_i messbar bzgl. $\otimes_{i\in I}\mathscr{F}_i$. Außerdem ist

$$\bigotimes_{i \in I} \mathscr{F}_i = \sigma\Big(\Big\{A_i \times \bigtimes_{j \in J \setminus \{i\}} \Omega_j : A_i \in \mathscr{F}_i, i \in I\Big\}\Big).$$

Unter geeigneten Voraussetzungen ist die Borel-σ-Algebra der Produkttopologie gleich der Produkt-σ-Algebren der einzelnen Borel-σ-Algebren. Abzählbarkeit ist eine solche (vgl. Elstrodt, Kapitel III.5).

Lemma 1.59. *Ist I abzählbar und $(\Omega_i, \mathscr{O}_i)$ polnisch für jedes $i \in I$, so gilt*

$$\mathscr{B}(\Omega) = \bigotimes_{i \in I} \mathscr{B}(\Omega_i).$$

Insbesondere gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \bigotimes_{i=1}^{d} \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Wir nutzen folgendes, einfaches topologisches Resultat: Ist $(\Omega, \mathscr{O})$ separabel, so hat $\mathscr{O}$ eine abzählbare Basis $\mathscr{B}$, d.h.

$$\mathscr{O} = \Big\{\bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathscr{B}, i \in I, I \text{ beliebig}\Big\}$$

Da alle $(\Omega_i, \mathscr{O}_i), i \in I$, separabel sind, haben sie jeweils abzählbare Basen $\mathscr{B}_i$. Dann ist

$$\mathscr{B} := \Big\{ \bigtimes_{j \in J} A_j \times \bigtimes_{i \in I \setminus J} \Omega_i : J \subseteq I, J \text{ endlich}, A_i \in \mathscr{B}_i\Big\}$$

eine abzählbare Basis von $(\Omega, \mathscr{O})$. Dann ist $\sigma(\mathscr{B}) = \mathscr{B}(\Omega)$ (siehe das folgende Lemma).

Außerdem ist $\mathscr{B} \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathscr{B}(\Omega_i)$, also $\mathscr{B}(\Omega) \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathscr{B}(\Omega_i)$.

Umgekehrt ist für $A_i \in \mathscr{F}_i$

$$\begin{aligned} A_i \times \bigtimes_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_j &\in \sigma\Big(\Big\{A_i \times \bigtimes_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_i : A_i \in \mathscr{O}_i\Big\}\Big) \\ &\subseteq \mathscr{B}(\Omega). \end{aligned}$$

□

Man erhält leicht folgendes Resultat über erzeugende Halbringe:

Lemma 1.60. *(i) Sei I endlich, $\mathscr{H}_i$ Halbringe mit $\sigma(\mathscr{H}_i) = \mathscr{F}_i$. Dann ist*

$$\mathscr{H} := \Big\{ \bigtimes_{i \in I} A_i : A_i \in \mathscr{H}_i, i \in I \Big\}$$

ein Halbring mit $\sigma(\mathscr{H}) = \bigotimes_{i \in I} \mathscr{F}_i$.

(ii) Sei I beliebig, $\mathscr{H}_i$ durchschnittstabil und $\sigma(\mathscr{H}_i) = \mathscr{F}_i$. Dann ist

$$\mathscr{H} := \Big\{ \bigtimes_{j \in J} A_j \times \bigtimes_{i \in I \setminus J} \Omega_i : J \subseteq I, J \text{ endlich}, A_j \in \mathscr{H}_j, j \in J \Big\}$$

durchschnittstabil mit $\sigma(\mathscr{H}) = \bigotimes_{i \in I} \mathscr{F}_i$.

1.7 Der Satz von Fubini

Ein wichtiges Hilfsmittel für Maße auf Produkträumen sind **Übergangskerne**, falls

Definition 1.61. Seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ Messräume.

Eine Abbildung $\kappa : \Omega_1 \times \mathscr{F}_2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Übergangskern*, falls

(i) für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ ist $\kappa(\omega_1, \cdot)$ ein Maß auf $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$

(ii) für alle $A_2 \in \mathscr{F}_2$ ist $\kappa(\cdot, A_2)$ $\mathscr{F}_1$-messbar.

Ein Übergangskern heißt *σ-finit*, falls es $A_1, A_2, \ldots \uparrow \Omega_2$ gibt mit $\sup_{\Omega_1} \kappa(\omega_1, A_n) < \infty$ für alle $n = 1, 2, \ldots$

Er heißt *stochastischer Kern* oder *Markovscher Kern*, falls

$$\kappa(\omega_1, \Omega_2) = 1 \qquad \text{für alle } \omega_1 \in \Omega_1.$$

Beispiel 1.62 (Markov-Kette)**.**
Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ mit Wahrscheinlichkeiten $(p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, so dass mit $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \forall i$. Dann ist

$$\kappa(\omega_i, \cdot) := \sum_{j=1}^n p_{ij} \delta_{\omega_j}$$

ein stochastischer Kern von $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ nach $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Die (p_{ij}) bilden die Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen **Markov-Kette**.

Lemma 1.63 (Messbarkeit integrierbarer Schritte)**.** *Sei κ ein σ-finiter Übergangskern und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$-messbar. Dann ist*

$$\omega_1 \mapsto \int f(\omega_1, \omega_2) \kappa(\omega_1, d\omega_2)$$

$\mathscr{F}_1$-messbar.

Beweis (Skizze). Zunächst nehmen wir $\kappa(\omega_1, \Omega_2) < \infty$ an. (Dann Erweiterung mittels $A_1, A_2 \uparrow \Omega_2$.) Wir betrachten

$$\mathscr{D} = \left\{ A \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 : \omega_1 \mapsto \int \mathbb{1}_A(\omega_2) \kappa(\omega_1, d\omega_2) \text{ ist } \mathscr{F}_1\text{-messbar} \right\}$$

Dies ist ein durchschnittstabiles Dynkin-System mit $\mathscr{H} = \{A_1 \times A_2, A_i \in \mathscr{F}_i\} \subseteq \mathscr{D}$. Nun gilt $\sigma(\mathscr{H}) = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$, also $\sigma(\mathscr{H}) = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{D} \subseteq \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ und die Aussage folgt für $f = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$.

Wir erhalten die Aussage für Treppenfunktionen und mit monotoner Konvergenz für alle messbaren $f \geq 0$. □

Theorem 1.64 (Ionescu-Tulcea)**.** Seien $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$, $i = 0, \dots, n$ Messräume, μ ein σ-finites Maß auf $(\Omega_0, \mathscr{F}_0)$ und κ_i σ-finite Übergangskerne von $(\bigtimes_{j=0}^{i-1} \Omega_j, \bigotimes_{j=0}^{i-1} \mathscr{F}_j)$ nach $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Dann gibt es genau ein σ-finites Maß $\kappa = \mu \bigotimes_{i=1}^{n} \kappa_i$ auf $(\bigtimes_{j=0}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=0}^{n} \mathscr{F}_j)$, so dass

$$\kappa(A_0 \times \dots \times A_n) = \int_{A_0} \cdots \int_{A_n} \kappa_n(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}, d\omega_n) \cdots \kappa_1(\omega_0, d\omega_1)\mu(d\omega_0). \tag{1.65}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage für $n = 1$, der allgemeine Fall folgt dann per Induktion. Der Beweis ist eine typische Anwendung des Maßfortsetzungssatzes: Wir starten mit dem durchschnittstabilen Halbring

$$\mathscr{H} = \left\{ \bigtimes_{i=0}^{n} A_i : A_i \in \mathscr{F}_i \right\}$$

und betrachten die durch (1.65) definierte Mengenfunktion κ auf $\mathscr{H}$.

(i) *κ ist σ-finit:* Seien $(\Omega^i_n) \subseteq \mathscr{F}_i$ so dass $(\Omega^i_n) \uparrow \Omega^i$, $i = 0, 1$ und $\mu(\Omega^0_n) < \infty$ und $\sup_{\omega^0 \in \Omega^0} \kappa_1(\omega_0, \Omega^1_n) =: C_n < \infty$.

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \kappa(\Omega^0_n \times \Omega^1_n) &= \int_{\Omega^0_n} \int_{\Omega^1_n} \kappa(\omega^0, d\omega^1)\mu(d\omega^0) \\ &\leq C_n \mu(\Omega^1_n) < \infty. \end{aligned}$$

Da $\Omega^0_n \times \Omega^1_n \uparrow \Omega_0 \times \Omega_1$ ist κ σ-finit.

(ii) *κ ist σ-additiv:* Für $A_1, A_2 \in \mathscr{H}$ p. d. mit $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{H}$ ist

$$\begin{aligned} \kappa(A) &= \int \int \mathbb{1}_A(\omega_0, \omega_1)\kappa_1(\omega_0, d\omega_1) \\ &= \int \sum_{n \geq 1} \int \mathbb{1}_{A_n}(\omega_0, \omega_1)\kappa_1(\omega_0, d\omega_1) \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n \geq 1} \int \int \mathbb{1}_{A_n}(\omega_0, \omega_1)\kappa_1(\omega_0, d\omega_1)\mu(d\omega_0) \end{aligned}$$

wobei wir für (*) monotone Konvergenz nutzten. Mit dem Maßfortsetzungssatz erhalten wir die Behauptung. □

Bemerkung 1.66. Mit etwas mehr Aufwand kann man die Aussage auch für $n = \infty$ beweisen, siehe Bogachev(1991).

Theorem 1.67 (Satz von Fubini)**.** Seien $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$, μ_0, κ_i und $\kappa = \mu_0 \bigotimes_{i=1}^n \kappa_i$ wie in Theorem 1.64 gegeben und $f : \bigtimes_{i=0}^{n} \Omega_0 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar bzgl. $\bigotimes_{i=0}^n \mathscr{F}_i$. Dann gilt

$$\int f d\kappa = \int \Big(\cdots \Big(\int f(\omega_0, \ldots, \omega_n) \kappa_n(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1} d\omega_n) \Big) \cdots \kappa_1(\omega_0, d\omega_1) \Big) \mu(d\omega_0). \tag{1.68}$$

Die Aussage gilt auch für beliebig messbare $\mathscr{F}$ mit $\int |f| d\kappa < \infty$.

Beweis. Die Messbarkeit der einzelnen Integrale folgt nach Lemma 1.63.

Für alle $A \in \bigotimes_{i=0}^n \mathscr{F}_i$ betrachten wir $A \mapsto \int_A d\kappa =: I(A)$. Zunächst gilt für $A \in \left\{ \bigtimes_{i=0}^{n} A_i : A_i \in \mathscr{F}_i \right\}$, dass $I(A) = \kappa(A)$ und somit (1.68). Wegen der Linearität des Integrals und dem Satz der monotonen Konvergenz folgt (1.68) für alle nicht-negativen, messbaren Funktionen.

□

Die aus der Analysis bekannte Aussage für Produktmaße $\mu_0 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ erhält man als einfachen Spezialfall!

Beispiel 1.69 (Mehrdimensionales Lebesgue-Maß)**.** Mit $\lambda_d = \bigotimes_{i=1}^d \lambda$ bezeichnen wir das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^d$

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \int f(x, y) dy = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \qquad \iint f(x, y) \lambda(dy) \lambda(dx) = \iint f(x, y) \lambda(dx) \lambda(dy) = 0.$$

Allerdings ist $|f|$ nicht bzgl. λ_2 integrierbar!

Aus Gleichheit und Endlichkeit der Mehrfachintegrale kann man also nicht auf die Integrierbarkeit des Integrand schließen.

Betrachten wir zwei unabhängige Zufallsvariable X und Y, so heißt die Verteilung von $X + Y$ die **Faltung**. Die führt zu folgendem Konzept.

Definition 1.70. Seien $\mu_1, \dots, \mu_n$ σ-finite Maße auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ deren Produktmaß und $S(x) = x_1 + \cdots + x_n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$S_*\mu := \mu_1 * \cdots * \mu_n$$

die *Faltung* der Maße $\mu_1, \dots, \mu_n$.

Übungsaufgabe 1.71. Haben die Maße μ_i Dichten f_i bzgl. λ_i, $i = 1, 2$ und setzt man

$$f_{\mu*\nu}(t) := \int f_\mu(s) f_\nu(t-s) \lambda(ds),$$

so gilt

$$\mu * \nu = f_{\mu*\nu} \cdot \lambda. \tag{Fubini}$$

Betrachte $\quad P(X + Y \leq x) = P(X \leq x - y)$!

Übungsaufgabe 1.72. Die Faltung zweier Normalverteilungen ist wieder normalverteilt.

1.8 Der Existenzsatz von Kolmogorov

Bisher haben wir endliche bzw. abzählbare Produkträume betrachtet, was für unsere Anwendungen nicht ausreichen wird. Der Satz von Kolmogorov erlaubt die Erweiterungen auf größere Räume, kommt allerdings nicht ohne die Voraussetzung aus, dass diese *polnisch* sind.

Als Beispiele können wir den unendlichen Würfelwurf betrachten und die Ergebnisse als eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auffassen. Oder wir betrachten einen Zählprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ (das ist ein Prozess, der in Null startet und dann jeweils an einer zufälligen Zeit um 1 springt).

Beispiel 1.73. (i) $\mathbb{R}^d = \overline{\mathbb{Q}}^d$ ist separabel und vollständig

(ii) Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt $\Rightarrow (C(K), \sup) = (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ist **polnisch** (Weierstraß'scher Approximationssatz – Polynome)

Wir erinnern daran, dass π_H^J die Projektion von J auf H bezeichnete.

Definition 1.74. Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein Maßraum und I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaße $P = (P_J : J \subseteq I, J \text{ endlich})$ heißt *projektive Familie*, falls P_J Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega^J, \mathscr{F}^J)$ und

$$P_H = \pi_{H*}^J P_J$$

für alle $H \subseteq J \subseteq I$, J endlich.

Beispiel 1.75. Betrachten wir etwa den Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$: In diesem Fall gilt $P(N_t \in \{0, 1, 2, \dots\} = 1)$, N is wachsend und

$$P(N_{t_j} = n_j,\ j \leq k) = \prod_{j=1}^{k} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} \frac{\lambda(t_j - t_{j-1})^{n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!}.$$

Man erhält man eine projektive Familie durch die *endlich-dimensionalen Randverteilungen*

$$\mu_{t_1,\dots,t_k}(H) = P\big((N_{t_1}, \dots, N_{t_k}) \in H\big), \quad H \in \mathbb{R}^k.$$

Die bestimmen allerdings die Verteilung des Prozesses noch nicht vollständig! Konstruieren Sie einen Prozess N' mit den gleichen Randverteilungen als Übungsaufgabe.

Definition 1.76. Existiert für eine solche projektive Familie P ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_I auf $\mathscr{F}^I = \otimes_{i\in I}\mathscr{F}_i$ mit $P_J = \pi_J * P_I$ für alle $J \subseteq I$, J endlich, so heißt P_I *projektiver Limes* der Familie P. Wir schreiben

$$P_I = \varprojlim_{J \Subset I} P_J$$

mit der Konvention $J \Subset I = J \subseteq J$ und J endlich.

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

In diesem Abschnitt beginnen wir nun mit einer systematischen Entwicklung von Zufallsvariablen und Konvergenzen von Zufallsvariablen mit den dazugehörigen Hilfsmitteln. Dabei werden wir natürlich massiv von der im ersten Kapitel entwickelten Maßtheorie profitieren. Zentrale Resultate in diesem Abschnitt sind ein allgemeines starkes Gesetz der großen Zahl und ein allgemeiner zentraler Grenzwertsatz. Zunächst beginnen wir mit Grundlagen, die einige Resultate aus der Stochastik I wiederholen und in etwas allgemeinerer Form formulieren.

2.1 Grundlagen

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und einen Bildraum $(\Omega', \mathscr{F}')$. Eine Abbildung

$$X : \Omega \to \Omega'$$

heißt **Zufallsvariable**, falls sie $\mathscr{F} - \mathscr{F}'$-messbar ist. Wir schreiben

$$\begin{aligned} X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}, \\ \sigma(X) &= \{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{F}'\} \end{aligned}$$

für das *Urbild* von X und die von X erzeugte σ-Algebra. Das Bildmaß

$$X_* P(B) = P(X^{-1}(B)) : \mathscr{F}' \to [0, 1]$$

heißt **Verteilung** von X. Haben X und Y die gleiche Verteilung (equality in law), so schreiben wir

$$X \stackrel{\mathscr{L}}{=} Y.$$

Wir sagen, X hat die **Dichte** f bzgl. des Maßes ν, falls $X_* P = f \cdot \nu$, also

$$P(X \in A) = \int_A f d\nu, \qquad A \in \mathscr{F}'.$$

Für eine messbare Zufallsvariable $X \geq 0$ definieren wir

$$E[X] = \int X dP$$

und im Falle der Quasi-integrierbarkeit den Erwartungswert als Summe der Integrale der Positiv- und Negativ-Teile.

Monotonie und Linearität des Integrals liefern für Zufallsvariable X, Y die Regeln

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y],$$
$$0 \leq X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y].$$

Eine Zufallsvariable ist meßbar bezüglich der von X erzeugten Filtration, wenn sie als meßbare Funktion von X geschrieben werden kann. Das die Umkehrung überraschenderweise auch gilt zeigt folgendes Lemma.

Lemma 2.1. *Sei $X : \Omega \to \Omega'$ eine Zufallsvariable. $Z : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\sigma(X)$-messbar, falls*

$$Z = f(X)$$

mit $f : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{F}' - \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar.

Beweis. „$\Leftarrow$" klar.

„$\Rightarrow$" Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $Z \geq 0$. (Ansonsten betrachte $Z = Z^+ - Z^-$.) Der Beweis benutzt die Approximation von Z durch Elementarfunktionen und geht in drei Schritten:

(i) Sei $Z = \mathbb{1}_A$, $A \in \sigma(X)$. Dann existiert $A' \in \mathscr{F}'$ mit $X^{-1}(A') = A$, also

$$Z = \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{X^{-1}(A')} = \mathbb{1}_{A'} \circ X \Rightarrow f = \mathbb{1}_{A'}.$$

(ii) Mit Linearität erhalten wir die Aussage für einfache $Z = \sum c_i \mathbb{1}_{A_i}$.

(iii) Ist $Z \geq 0$ messbar, so gibt es einfache $(Z^n)_{n \geq 1} \uparrow Z$ und $Z_n = f_n \circ X \;\Rightarrow$

$$(\sup_n f_n) \circ X = \sup_n f_n \circ X = \sup Z_n = Z$$

und mit $f = \sup f_n$ sind wir fertig, denn nach Lemma 1.26 ist $\sup f_n$ meßbar. $\square$

Als nächstes Resultat beweisen wir eine Reihe von wichtigen Ungleichungen, die wir im Folgenden ständig benutzen werden. Vorab definieren wir noch $\|\cdot\|_p = E[|X|^p]^{1/p}$. Die Minkowski-Ungleichung wird zeigen, dass dies für $p \geq 1$ auch eine Norm auf dem L^p ist.

Satz 2.2. *Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen. Dann gilt:*

(i) *Für alle monoton wachsenden $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varepsilon > 0$ so dass $f(\varepsilon) > 0$*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[f(|X|)]}{f(\varepsilon)}, \qquad \text{Markov-Ungleichung}$$

(ii) *für $E[X^2] < \infty$, dass*

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{\varepsilon^2}, \qquad \text{Tschebyscheff-Ungleichung}$$

(iii) *für $0 < p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, dass*

$$\|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q \qquad \text{Hölder-Ungleichung}$$

für $p = q = 2$ und $r = 1$ erhalten wir die wichtige Cauchy-Schwarz-Ungleichung,

(iv) *für $1 \leq p \leq \infty$, dass*

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p, \qquad \text{Minkowski-Ungleichung}$$

(v) *für $0 < p \leq q$, und $X \in \mathscr{L}^q$, dass*

$$\|X\|_p \leq \|X\|_q.$$

Bevor wir diesen Satz beweisen schließen wir noch die wichtige Jensen-Ungleichung an:

Satz 2.3 (Jensensche Ungleichung)**.** *Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $x \in \mathscr{L}^1$. Dann gilt*

$$E[g(X)] \geq g(E[X]).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn für jede Gerade $a + bx$ tangential zu g an $x = E[X]$ gilt, dass $P(g(X) = a + bX) = 1$.

Beweis zu Satz 2.2:

(i) Da $f(\varepsilon) > 0$ und $f(x) \geq 0$ ist, folgt für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\{|x|\geq\varepsilon\}} \leq \mathbb{1}_{\{f(|x|)\geq f(\varepsilon)\}} &= \mathbb{1}_{\left\{\frac{f(|x|)}{f(\varepsilon)}\geq 1\right\}} \\ &\leq \frac{f(|x|)}{f(\varepsilon)}\mathbb{1}_{\left\{\frac{f(|x|)}{f(\varepsilon)}\geq 1\right\}} \leq \frac{f(|x|)}{f(\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Durch Monotonie des Erwartungswertes folgt die Behauptung.

(ii) Wir verwenden (i): Setzen wir $Y = |X - E[X]|$ und wählen $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (diese Funktion ist monoton), so gibt (i) das Resultat.

(iii) Zunächst ist e^x konvex und damit für $x, y \geq 0$

$$\begin{aligned}(xy)^r = \exp(r\log x + r\log y) &= \exp\left(\frac{r}{p}\log x^p + \frac{r}{q}\log x^q\right) \\ &\leq \frac{r}{p}x^p + \frac{r}{q}x^p. \qquad (\text{da } \tfrac{r}{p} + \tfrac{r}{q} = 1)\end{aligned}$$

Das wenden wir an auf $X' = \frac{|X|}{\|X\|_p}$, $Y' = \frac{|Y|}{\|Y\|_p}$ und erhalten

$$E[(X'Y')^r] \leq \frac{r}{p}\frac{E[|X|^p]}{\|X\|_p} + \frac{r}{q}\frac{E[|Y|^q]}{\|Y\|_q} = 1,$$

also

$$1 \geq E[(X'Y')^r = \frac{E[|X'Y'|^r]}{\|X\|_p^r\|Y\|_q^r},$$

und die Behauptung folgt.

(iv) Dieser Beweis ist trickreicher. Zunächst ist

$$|x+y|^p = |x+y| \cdot |x+y|^{p-1} \leq |x| \cdot |x+y|^{p-1} + |y| \cdot |x+y|^{p-1}.$$

Mit (iii) folgt, dass

$$E[|x| \cdot |x+y|^{p-1}] \leq \|x\|_p \cdot \||x+y|^{p-1}\|_q \quad \text{mit } \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Dabei ist

$$\||x+y|^{p-1}\|_q = E\left[|x+y|^{(p-1)\cdot q}\right]^{1/q} = \|x+y\|_p^{p/q} = \|x+y\|_p^{p-1},$$

da $(p-1) \cdot q = p$ und $\frac{p}{q} = p - 1$.

Das liefert $E[|x+y|^p] = \|x+y\|_p^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \cdot \|x+y\|_p^{p-1}$

(v) Zunächst ist $x \mapsto x^{p/q}$ konkav auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, also folgt mit Satz 2.3

$$E[|X|^p] = E[(|X|^q)^{p/q}] \leq (E[|X|^q])^{p/q}$$

und wir sind fertig. □

Beweis zu Satz 2.3: Für eine konvexe Funktion f gibt es an jedem Punkt x eine Tangente $y \mapsto a + by$, so dass

$$f(y) \geq a + by \quad \forall y.$$

Hierbei kann die Gerade auch als $f(x) + b(y - x)$ parametrisiert werden. Wir betrachten diese unterstützende Gerade am Punkt $E[X]$.

Dann ist

$$f(y) \geq f(E[X]) + b \cdot (y - E[X]).$$

Anwendung des Erwarungswertes liefert

$$E[f(X)] \geq f(E[X]) + b \cdot (E[X] - E[X]) = f(E[X]). \qquad \square$$

Literatur

H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin, 1990.

P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley, 3rd edition, 1995.

V. I. Bogachev. *Gaussian Measures*. American Mathematical Society, 1991.

J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000.

Index

L^p
    Banach-Raum, 22

absolut stetiges Maß, 26
additiv, 13
additive Fortsetzung, 9
Algebra, 8
Approximationssatz, Weierstraß, 37
äquivalente Maße, 26
äußeres Maß, 7, 13

Banach-Raum, 22
Bildmaß, 17
Borel-σ-Algebra, 5
Borel-messbar, 17

Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 42

Dichte, 26
Dirac-Maß, 28
durchschnittsstabil, 5
Dynkin-System, 5

eindeutige Zerlegung, 25
Eindeutigkeit, 12
endlich, 7
Erzeugenden-Halbring, 16
erzeugter Ring, 9
Existenzsatz von Kolmogorov, 37

Faltung, 36, 37
Familie
    projektive, 37
Fatou-Konvergenz, 20
Fortsetzung
    einzige additive, 9
    von Maßen, 7
Fortsetzungssatz, 15
f. ü., 19
Fubini, Satz von, 34, 36

Hölder-Ungleichung, 42

Hahn-Zerlegung, 25
Halbring, 7
    Erzeugenden-, 16
Hilbertraum, 23

Inhalt, 7, 13
Ionescu-Tulcea-Theorem, 35

Jensensche Ungleichung, 42
Jordan-Zerlegung, 25

Kapazität, 7
Kern
    Markovscher, 34
    stochastischer, 34
Kolmogorov
    Existenzsat, 37
kompakter Raum, 30
Konvergenz
    Fatou-, 20
    im p-ten Mittel, 21
    majorisierte, 21
    monotone, 20

Lebesgue-Maß, 7
    mehrdimensionales, 36
Lebesgue-Zerlegung, 29
Limes
    projektiver, 38

Maß
    Lebesgue-, mehrdimensionales, 36
    mehrdimensionales Lebesgue-, 36
majorisierte Konvergenz, 21
Markov-Kette, 34
Markov-Ungleichung, 42
Markovscher Kern, 34
Maß, 7
    absolut stetiges, 26
    äquivalent, 26
    auf $\mathbb{R}$, 16

- äußeres, 7, 13
- Bildmaß, 17
- Dirac-, 28
- Fortsetzung, 7, 12
- Lebesgue-, 7
- Prämaß, 7
- signiertes, 24
- singuläres, 25

Maßraum, 17
Maßtheorie, 4
mehrdimensionales Lebesgue-Maß, 36
messbarer Raum, 17
Messbarkeit, 34
minimale Zerlegung, 25
Minkowski-Ungleichung, 42
monotone Konvergenz, 20

negativ, 24
Nullmenge, 24

p. d., *siehe* paarweise disjunkt
paarweise diskunkt, 16
Parallelogrammidentität, 23
polnisch, 37
polnischer Raum, 30
positiv, 24
Prämaß, 7
Produktraum, 30
Produkttopologie, 31
Projektion, 30
projektive Familie, 37
projektiver Limes, 38

Radon-Nikodým, Satz von, 28
Raum
- kompakt, 30
- Maß-, 17
- messbar, 17
- polnischer, 30

reellwertig, 17
Riesz-Fréchet, Satz von, 23
Ring, 8
- erzeugter, 9

Satz
- Eindeutigkeit, 12
- Existenzsatz von Kolmogorov, 37
- Fortsetzungssatz, 15
- Fubini, 34, 36
- Hahn-Zerlegung, 25
- Jordan-Zerlegung, 25
- Kolmogorov, Existenzsatz, 37
- Lebesgue-Zerlegung, 29
- Radon-Nikodým, 24, 28
- Riesz-Fréchet, 23

schnittstabil, 5
σ-Additivität, 7
σ-Algebra, 4
σ-finit, 7
signiertes Maß, 24
singuläres Maß, 25
stetig von oben/unten, 10
stochastischer Kern, 34
Subadditivität, 9

Theorem
- Ionescu-Tulcea, 35

Topologie
- Produkt-, 31

Übergangskern, 34
Ungleichung
- Cauchy-Schwarz-, 42
- Hölder-, 42
- Jensensche, 42
- Markov-, 42
- Minkowski-, 42
- wichtig, 42

Verteilung, 39
vollständig, 22

Wahrscheinlichkeitstheorie, 39
Weierstraß'scher Approximationssatz, 37

Zerlegung
- eindeutige, 25
- Lebesgue-, 29
- minimale, 25

Zufallsvariable, 39