Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber

https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 9

Abgabe: 10.01.2020 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Mit einem Startkapital von 1 Euro spielen Sie folgendes Glücksspiel: Wenn Ihr Kapital vor der n-ten Runde K_{n-1} beträgt, gewinnen Sie in der n-ten Runde nach dem Wurf einer fairen Münze $\frac{2}{3}K_{n-1}$ dazu, sofern Kopf erscheint, sonst verlieren Sie $\frac{1}{2}K_{n-1}$.

a) Berechnen Sie EK_n, und überzeugen Sie sich, dass $\lim_{n\to\infty} EK_n = \infty$ ist.

b) Zeigen Sie, dass K_n stochastisch gegen 0 konvergiert.

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen Y_i. Betrachten Sie in Teil b) die Zufallsvariable $\log K_n$ und wenden Sie das schwache Gesetz großer Zahlen an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $M, K \in \mathbb{R}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}\,(X)_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass X_i und X_j unkorreliert sind, wenn $|i-j| > K$ ist. Zeigen Sie für $Z_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)$ gilt $Z_{n^2} \to 0$ P-fast-sicher.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien X, X_n und Y_n Zufallsvariablen mit Werten in einem metrischen Raum (M, d). Dabei seien X_n und Y_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert. Außerdem gelte, dass $X_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X$ und $d(X_n, Y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_P 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$Y_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass eine Familie von Normalverteilungen genau dann straff ist, wenn die Familie der Parameter beschränkt ist.

Weihnachtsrätsel

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Es sei $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit abzählbarem Ω. Weiterhin sei $(X_n) \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ein stochastisch unabhängiges Mengensystem und $p_n := \mathbb{P}(X_n)$ für alle n. Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{n\geq 1} \min\{p_n, 1-p_n\} < \infty.$$

Folgern Sie hieraus, dass es kein unabhängiges Mengensystem (X_n) auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum geben kann mit konstanter, nicht-trivialer Wahrscheinlichkeit – also $\mathbb{P}(X_n) = p \in (0,1)$ für alle n.

Aufgabe 6 (3 Bonuspunkte)**.** Auf einer Kugelsphäre werden zufällig 4 Punkte (uniform-) verteilt. Die Punkte werden im Anschluss durch direkte Linien im dreidimensionalen Raum miteinander verbunden, wodurch ein Polyeder im Inneren der Kugel entsteht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt der Kugel im Polyeder liegt.
Hinweis: Berechnen Sie den Sachverhalt zunächst im zweidimensionalen Raum. Es ist klar, dass hier lediglich 3 Punkte auf einem Kreis gesetzt werden und das enstehende Gebilde einem Dreieck entspricht. Wenn Sie das Problem dort lösen können, gibt es Teilpunkte.

Frohe Weihnachten und
ein erfolgreiches neues Jahr 2020
wünschen Ihnen

T. Schmidt und M. Weber