Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber

https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 7

Abgabe: 13.12.2019 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien (X_n) eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen und X eine weitere $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable, so gilt

(a)
$$X_n \stackrel{f.s.}{\to} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \Leftrightarrow \sup_{m\geq n} |X_m - X| \stackrel{P}{\to} 0$$

(b) konvergiert $X_n \stackrel{f.s.}{\to} X$, so auch stochastisch $(X_n \stackrel{P}{\to} X)$.

(c) Stochastisches Cauchy-Kriterium. Sind die (X_n) P-fast sicher konvergent, so ist das äquivalent dazu, dass für alle $\epsilon > 0$ folgendes gilt:
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{|X_{m+n} - X_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgende Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen:

Seien (X_n) unabhängige und identisch verteilte (i.i.d) $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen. Ferner sei $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] < \infty$. Dann gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \stackrel{P}{\to} \mathbb{E}\left[X_1\right] < \infty.$$
Zeigen Sie weiterhin, dass $\mathbb{E}\left[X_1\right] < \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller, integrierbarer Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $X_n \to_P X$, $Y_n \to_P Y$ und $Z_n \to_P Z$. Zeigen Sie:

(a) $X_n + Y_n \to_P X + Y$.

(b) Gilt zusätzlich $E[X_n] \to E[X]$ und $E[Z_n] \to E[Z]$, so folgt $E[Y_n] \to E[Y]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen, integrierbaren Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn die beiden folgen Aussagen gelten:

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| < \infty$

(b) für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\int_A |X_n| dP \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, wenn $P(A) \leq \delta$ ist.