UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2019/2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 6

Abgabe: 06.12.2019 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Sei $K > 0$. Für $y \in \mathbb{R}$, zeigen Sie die Identität

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{(\omega+i\lambda)y}\frac{K^{-(\omega-1+i\lambda)}}{(\omega+i\lambda)(\omega-1+i\lambda)}d\lambda = \begin{cases} (K-e^y)^+ & \text{if } \omega < 0 \\ (e^y-K)^+ - e^y & \text{if } 0 < \omega < 1 \\ (e^y-K)^+ & \text{if } \omega > 1. \end{cases}$$

Hierbei ist i die imaginäre Einheit.
Hinweis: Die Fourier-Inversionsformel ist hier hilfreich. Sei hierzu g eine integrierbare Funktion und $\hat{g}$ dessen Fouriertransformierte. Dann gilt

$$g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda y}\hat{g}(y)\, d\lambda.$$

Außerdem sei $(\cdot)^+ := max\{0,\cdot\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Für ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\hat{\mu}$ die Fourier-Transformierte. Zeigen Sie, dass für Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν gilt:

(a) $\widehat{\mu+\nu} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$.

(b) Für $alpha > 0$ ist $\widehat{\alpha\mu} = \alpha\hat{\mu}$.

(c) $\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu}\cdot\hat{\nu}$

(d) Für jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist

$$\widehat{T(\mu)} = \hat{\mu}\circ T^\top,$$

mit $T^\top$ die transponierte lineare Abbildung von T.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Seien X, Y zwei $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie dass X, Y genau dann unabhängig sind, falls für die charakteristische Funktion $\varphi_{(X.Y)}$ des Zufallsvekrors (X, Y)

$$\varphi_{(X,Y)}(u_1, u_2) = \varphi_X(u_1)\cdot\varphi_Y(u_2)\ ,\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

gilt.
Bemerkung: Dieses Resultat lässt sich auf Zufallsvektoren X und Y verallgemeinern.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Eine $\mathbb{R}^d$-wertige ZV X heißt multivariat normalverteilt ($\mathcal{N}_d(\mu,\Sigma)$) mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$, Σ symmetrisch und positiv definit, falls sie die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

hat. Zeigen Sie zunächst, dass Σ seinen Namen verdient hat, also $\mathbb{E}\left[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\right] = \Sigma_{i,j}$ gilt. Zeigen Sie nun, dass die Koeffizienten von X genau dann unabhängig sind, wenn $\Sigma_{i,j} = c_{ij}\delta_{ij}$

für Konstanten c_{ij} gilt. Bestimmen Sie nun die charakteristische Funktion von X für gegebenes μ und Σ (echt positiv definit!).

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass zwei Zufallsvektoren mit stetigen Dichten f_1, f_2 auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^d$ genau dann unabhängig sind, wenn für die gemeinsame Dichte $f_{1,2}(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ gilt.

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Für ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\hat{\mu}$ die Fourier-Transformierte. Für ein weiteres Maß ν auf $\mathbb{R}^d$ sei $\mu \otimes \nu$ das Produktmaß. Gehen Sie davon aus dass μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße sind. Zeigen Sie

$$\widehat{\mu \otimes \nu}(x, y) = \hat{\mu}(x) \cdot \hat{\nu}(y) \ , \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d.$$