Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2019/2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 5

Abgabe: 29.11.2019 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Anmerkung: In der ersten Dezemberwoche finden die Evaluationen der Vorlesungen des mathematischen Instituts statt. Wir bitten alle Teilnehmenden, an der Evaluation teilzunehmen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Welche der folgenden Teilmengen des Raumes der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$$

sind messbar bzgl. $\mathfrak{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}(\mathbb{R})$?

(a) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 3\}$

(b) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $3\}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

(a) Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit stetigen Dichten f_X, f_X. Entsprechend seien F_X, F_Y die Verteilungsfunktionen. Zeigen Sie

$$F_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) F_Y(t-x) dx$$

(b) Sei Z eine weitere Zufallsvariable so dass X, Y, Z unabhängig sind. Zeigen Sie formal dass dann auch $X+Y$ unabhängig von Z ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien N, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ und $P^{X_n} = f_n \lambda$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) $S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n$ ist messbar,

(b) die Funktion

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)(f_1 * \ldots * f_n)(x)$$

ist eine Lebesguedichte von P^{S_N}.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Verteilungsklassen auf Faltungsstabilität.

(a) $\{\mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$, die Klasse der Normalverteilungen mit Erwartungswert 0.

(b) $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda > 0\}$, die Klasse der Exponentialverteilungen.

Hinweis: Eine Klasse M von Verteilungen heißt stabil unter Faltung, wenn für alle $\mu, \nu \in M$ gilt, dass $\mu * \nu \in M$.

Zur Erinnerung: Die oben genannten Verteilungen sind gegeben durch ihre Dichten

$$f_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \big(\sqrt{2\pi\sigma^2}\big)^{-1} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) \textit{ und}$$

$$f_{Exp(\lambda)}(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Sei F die Verteilungsfunktion einer $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+c) - F(x))\, dx = c,$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$.