Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

# Übung 4

**Abgabe: 22.11.2019 bis 10 Uhr in den Briefkästen.**

**Hilfreiche Definitionen:** Es sei $I \subseteq N_0$. Eine Matrix $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ heißt *stochastische Matrix*, falls die Zeilen von $P$ Wahrscheinlichkeitsmaße (Verteilungen) auf $I$ sind, d.h. wenn,

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in I \quad \text{und} \quad \sum_{j \in I} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in I.$$

Weiterhin seien $\nu = (\nu(i))_{i \in I}$ eine Verteilung auf $I$ und $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ eine stochastische Matrix. Man nennt den $I$-wertigen stochastischen Prozess $(X_n)_{n \geq 0}$ eine *zeitlich homogene Markovkette* mit Startverteilung $\nu$ und Übergangsmatrix $P$, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \in I$ gilt $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \nu(i_0)$ und

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \big| X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \big| X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}},$$

sofern die Ereignisse, auf welche bedingt wird, positive Wahrscheinlichkeit besitzen.

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p, \text{ und } \mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p, \quad p \in (0,1).$$

Seien ferner $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $M_n = \max\{S_k | 0 \leq k \leq n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $Y_n = M_n - S_n$ eine Markovkette ist und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix.

(b) Zeigen Sie, dass $M_n = Y_n + S_n$ keine Markovkette ist. (Also: die Summe zweier Markovketten muss nicht unbedingt eine Markovkette sein.)

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ für $i = 1,2$ und $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der Produktraum.

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \subset \Omega$, für die für alle $\omega_i \in [0,1]$ der $\omega_i$-Schnitt $A_{\omega_i} \in \mathcal{A}_j$ ist (für $i, j = 1,2$ und $i \neq j$), aber $A \notin \mathcal{A}$ gilt.
*Hinweis: Der $\omega_1$-Schnitt der Menge $A$ ist definiert als $A_{\omega_1} := \{\omega_1\} \times \Omega_2 \bigcap A = \{(\omega_1, \omega_j) \in A\}$ und der $\omega_2$-Schnitt analog.*

(b) Sei $D = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$ die Diagonale in $\Omega$, $\lambda$ das Lebesguemaß auf $\Omega_1$ und $\mu$ das Zählmaß auf $\Omega_2$, d.h.

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $D \in \mathcal{A}$, und berechnen Sie

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x,y) d\lambda(x) d\mu(y) \qquad \text{und} \qquad \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x,y) d\mu(y) d\lambda(x).$$

(c) Ist das Ergebnis in Teil b) ein Widerspruch zum Satz von Fubini?

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ eine messbare Abbildung. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathcal{A}$

$$\tilde{K}(k, A) := \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap \{X = k\})\mathbb{P}(\{X = k\}) & \text{für } \mathbb{P}(\{X = k\}) > 0, \\ \mathbb{P}(A) & \text{für } \mathbb{P}(\{X = k\}) = 0. \end{cases}$$

Zusätzlich sei $K(\omega, A) := \tilde{K}(X(\omega), A)$ für $\omega \in \Omega$ und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) $\tilde{K} : \mathbb{N}_0 \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ ist eine Markovkern von $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ nach $(\Omega, \mathcal{A})$.

(b) $K : \Omega \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ ist ein Markovkern von $(\Omega, \sigma(X))$ nach $(\Omega, \mathcal{A})$.

(c) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und $C \in \sigma(X)$ ist $\mathbb{E}[\mathbb{1}_C K(\cdot, A)] = \mathbb{P}(C \cap A)$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Beweisen Sie mit Fubini die Regel der partiellen Integration. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen, und für $x \in [a, b]$ seien

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(y)dy.$$

Dann gilt:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

*Hinweis: Wenden Sie Fubini auf die Funktion* $h : (x, y) \mapsto f(y)g(x)\mathbb{1}_E(x, y)$ *an, mit* $E = \{(x, y) \in [a, b]^2 : y < x\}$.