Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 3

Abgabe: 15.11.2019 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien λ, μ und ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

(a) Wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A) < \varepsilon$ und $\nu(A^c) < \varepsilon$, dann ist $\mu \perp \nu$.

(b) Sind $\lambda \ll \mu$ und $\mu \perp \nu$, dann auch $\lambda \perp \nu$.

(c) Wenn $\mu \ll \nu$ und $\mu \perp \nu$, muss schon $\mu \equiv 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es seien μ und ν zwei Maße auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und ν endlich. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\nu \ll \mu$.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \leq \delta$ auch $\nu(A) \leq \varepsilon$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien $\Omega = \mathbb{N}_0$, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p, q \in [0, 1]$, $\nu = \mathcal{B}(n, p)$ die Binomialverteilung mit Parametern n und p (also $\nu(\{0, \dots, n\}^c) = 0$) und analog $\mu = \mathcal{B}(m, q)$. Untersuchen Sie, für welche Parameter eine Radon-Nikodym-Dichte existiert, und berechnen Sie diese.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine exponentialverteilte Zufallsvariable, d.h. P^X hat bzgl. des Lebesguemaßes die Dichte $f_X(x) = ce^{-cx}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ mit $c > 0$.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = \max\{X, 1\}$ und die Lebesguezerlegung $\nu_1 + \nu_2$ von $\nu = P^Y$ bzgl. des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.