Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2019/2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 2

Abgabe: 08.11.2019 bis 18 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei $r : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$r((x,y),(u,v)) = |xy - uv|, \; (x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Untersuchen Sie jeweils, ob (M_1, r) oder (M_2, r) metrische Räume sind. Dabei sei

$$M_1 = \{(x,y) |\, x \le y; x, y \in \mathbb{N}\}, \quad M_2 = \{(x,y) |\, x \le y; x \text{ und } y \text{ sind Primzahlen}\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass zwei σ-endliche Maße μ, ν auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ genau dann übereinstimmen, wenn für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit kompakten Träger $\mu[f] = \nu[f]$ gilt. Hierbei ist für ein Maß μ:

$$\mu[f] := \int_\Omega f d\mu.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Geben Sie ein Beispiel für zwei Maße μ, ν an, mit $\nu << \mu$ für das keine Dichte f mit $d\nu = f d\mu$ existiert.
Hinweis: Der Satz von Radon-Nikodym kann hier hilfreich sein.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A} := \{\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \subset [0,1] \big| a_i \le b_i \quad \forall\; i \le n \in \mathbb{N}\}$. Weiterhin sei $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ eine Mengenfunktion, definiert durch

$$\mu\left((a,b]\right) := b - a.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra, aber keine σ-Algebra ist.

(b) Man betrachte eine paarweise disjunkte Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ einen eindeutigen Grenzwert besitzt. Ist dieser für jede beliebige Partition von $A := \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ in $\mathcal{A}$ der selbe?