Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2019/2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 14

Abgabe: KEINE ABGABE in den Briefkästen.

Aufgabe 1. Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \nu$ wobei $\mu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R}_+$. Definiere die Familie $S_n, n \in \mathbb{N}_0$ mit $S_0 = 0$ und $S_n = X_n + S_{n-1}$. Sei ferner $p_n := P(S_n \geq 0)$. Bestimmen Sie für $n \geq m$

$$\mathbb{E}[S_n|\sigma(S_m)], \qquad \mathbb{E}\left[S_n|\sigma(S_m^2)\right], \qquad \mathbb{E}\left[S_n^2|\sigma(S_m)\right], \qquad \mathbb{E}[S_m|\sigma(S_n)], \qquad \mathbb{E}[X_i|\sigma(S_n)]$$

Aufgabe 2. Man zeige durch ein Beispiel dass $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]|\mathcal{F}] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|\mathcal{A}]$ gelten kann.

Aufgabe 3. Für einen adaptierten Prozess $X = (X_t)_{t=0,\ldots,T}$ mit $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$, zeigen Sie die Äquivalenz

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \;\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T \Leftrightarrow \mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t \;\forall\, t = 0, \ldots, T-1.$$

Aufgabe 4. Sei $p \in [0,1]$ und X ein stochastischer Prozess mit Werten in $[0,1]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte: Gegeben $X_0, \ldots, X_n$ ist

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 - p + pX_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } X_n \\ pX_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - X_n, \end{cases}$$

wobei X_0 deterministisch ist. Zeigen Sie, dass X ein Martingal ist und fast sicher konvergiert. Bestimmen Sie die Verteilung des fast sicheren Grenzwertes.

Aufgabe 5. (a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra und $B \in \mathcal{B}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{B}) > \varepsilon$ gilt

$$\mathbb{P}(A \mid B) > \varepsilon,$$

wobei $\mathbb{P}(A \mid B)$ die elementare bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichne.

(b) Sei τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Es gebe $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \in (0,1)$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbb{P}(\tau < n + N \mid \mathcal{F}_n) > \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass τ fast sicher endlich ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $\mathbb{P}(\tau \geq kN) \leq (1-\varepsilon)^k$. Verwenden Sie das Ergebnis aus (a).

Aufgabe 6. Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig, sodass für alle k gilt $\mathbb{P}(X_k = \frac{1}{k}) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_k = -\frac{1}{k})$ und $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \geq 1$ ein $\mathcal{L}^2$-beschränktes $\mathcal{F}$-Martingal definiert.

(b) Untersuchen Sie das Martingal aus a) auf fast sichere, $\mathcal{L}^1$- und $\mathcal{L}^2$-Konvergenz.

(c) Zeigen Sie, dass $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX_k \xRightarrow{n\to\infty} Z$ für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.