UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2019/2020

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 13

Abgabe: 07.02.2020 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Für $t > 0$ sei $Y_t := \min\{X, t\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X|Y_t] = X\mathbb{1}_{\{X<t\}} + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{1}_{\{X\geq t\}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie ein Erzeugendensystem von $\sigma(Y_t)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für unabhängige, auf $[0,1]$ uniform-verteilte Zufallsvariablen X, Y gilt, dass

$$\mathbb{E}[X \mid \max(X,Y)] = \tfrac{3}{4}\max(X,Y).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Weiterhin seien $p, q > 1$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, so dass $X \in L^p$ und $Y \in L^q$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[|XY|\,|\mathcal{C}] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\,|\,\mathcal{C}\right]\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\mathbb{E}\left[|X|^q\,|\,\mathcal{C}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \mathbb{P}-f.s.$$

Hinweis: Wie im Beweis der Jensen'schen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte können Sie auch diese Aussage auf den entsprechenden Satz für gewöhnliche Erwartungswerte zurückführen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien $\mu \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det A \neq 0$ sowie $\Sigma := AA^T$. Ein Zufallsvektor (Y_1, Y_2) heißt
$N(\mu, \Sigma)$-verteilt, falls es unabhängige, $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen X_1, X_2 gibt mit

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für diesen Fall

a) die Verteilung von Y_2,

b) eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y_2 gegeben Y_1.