

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt

Übung: Marc Weber

<https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020>

## Übung 12

**Abgabe: 31.01.2020 bis 10 Uhr in den Briefkästen.**

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Zeigen Sie, dass für  $n \rightarrow \infty$

$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

*Hinweis: Zentraler Grenzwertsatz.*

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Es sei  $S_n \sim \text{Poi}(n)$  für  $n \geq 1$ . Berechnen Sie für  $n \rightarrow \infty$  den Grenzwert von

$$q_n := \mathbb{E} \left[ \left( \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \right)^+ \right].$$

*Hinweis: Beachten Sie, dass die Abbildung auf den Positivteil  $x \mapsto x^+$  zwar stetig ist, aber nicht beschränkt. Betrachten Sie daher zunächst Trunkierungen dieser Abbildung, d.h. Abbildungen der Form  $x \mapsto \min\{x^+, a\}$  für festes  $a > 0$ , und schätzen Sie geschickt ab.*

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Zeigen Sie, dass für jede Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zufallsvariablen, die dem zentralen Grenzwertsatz genügt, auch das schwache Gesetz großer Zahlen gilt.

*Hinweis: Gemeint ist hier, dass die Folge dem zentralen Grenzwertsatz genügt, falls für die Summe  $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$  gilt, dass  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{V}[S_n] < \infty$ , und die standardisierte Summe*

$$S_n^* := \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N$$

*für  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$  erfüllt.*

**Aufgabe 4** (4 Punkte). Es seien  $X$  und  $Y$  unabhängige, identisch verteilte und integrierbare reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X|X+Y] = \frac{X+Y}{2}.$$

**Aufgabe 5** (2 Bonuspunkte). Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $X_0, \dots, X_n$  unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen heißt die Verteilung von

$$\frac{X_0}{\sqrt{(X_1^2 + \dots + X_n^2)/n}}$$

*t-Verteilung* mit  $n$  Freiheitsgraden. Zeigen Sie, dass diese für  $n \rightarrow \infty$  in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.