Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2019/2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 11

Abgabe: 24.01.2020 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, $X_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$ und X habe die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \exp(-e^{-x})$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathbb{P}(\max_{1\le k\le n} X_k \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x)^n$ und $\mathbb{P}(\min_{1\le k\le n} X_k \ge x) = \mathbb{P}(X_1 \ge x)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) $n \min_{1\le k\le n} X_k \overset{d}{=} X_1$.

(c) $\max\limits_{1\le k\le n} X_k - \log n \Rightarrow X$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße, von denen alle Momente endlich sind. Zeigen oder widerlegen Sie:
Die Menge $\mathcal{M} := \{x \mapsto x^n : n = 1, 2, \dots\}$ ist separierend auf $\mathcal{P}'$, d.h.: Stimmen von zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$ alle Momente überein, so ist $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

Hinweis: Es sei $X \sim N(0,1)$ und f die Dichte von $Y = e^X$. Betrachten Sie die Dichte $g(x) := f(x)(1 + \sin(2\pi \log(x)))$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Die Verteilung einer Zufallsvariable X heißt unendlich teilbar, wenn es für jedes $n = 1, 2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ gibt mit $X_1 + \cdots + X_n \sim X$. Zeigen Sie:

(a) $N(0,1)$ ist unendlich teilbar.

(b) Sei $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, sowie $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilt, und auch unabhängig von N. Dann ist die Verteilung von $Y_1 + \cdots + Y_N$ unendlich teilbar.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Überprüfen Sie $X_n \Longrightarrow X$ für $n \to \infty$ in den folgenden Fällen:

(a) $Y_n \sim \mathrm{Poi}(n)$, $X_n := \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$ und $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(b) $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ mit $\mu_n \to \mu$ und $\sigma_n^2 \to 0$ sowie $X \sim \delta_\mu$, also $\mathbb{P}(X = \mu) = 1$.

Aufgabe 5 (3 Bonuspunkte)**.** Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.