Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2019/2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 10

Abgabe: 17.01.2020 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $(\mathbb{P}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $(\mathbb{P}_i)_{i\in I}$ ist straff.
2. Für alle Projektionen $\pi_1, \dots, \pi_d$ ist $(\mathbb{P}_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei $(\mu_n)_n$ eine Folge von endlichen Maßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$, die vage gegen ein endliches Maß μ konvergiert. Zeigen Sie $\mu(\mathbb{R}^d) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d)$. Nennen Sie außerdem ein Beispiel für eine vage konvergente Maßfolge (μ_n), für die $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d) \neq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige Darstellung $n = 2^{k_n} + m_n$ mit $0 \leq m_n < 2^{k_n}$. Es sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ – das heißt, $\mathbb{P}$ hat Lebesgue-Dichte $\mathbb{1}_{[0,1]}$ – und außerdem

$$X_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \begin{cases} k_n & \text{für } \frac{m_n}{2^{k_n}} \leq \omega \leq \frac{m_n+1}{2^{k_n}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Folge der X_n bezüglich $\mathbb{P}$ auf schwache, stochastische, fast sichere und $\mathcal{L}^p$-Konvergenz für $p \geq 1$ sowie auf gleichgradige Integrierbarkeit.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien X und Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen, die nur Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen. Zeigen Sie

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(Y_n = j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = j).$$