Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2019/2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 8

Abgabe: 20.12.2020 bis 10 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch zum Parameter $\alpha > 0$ exponentialverteilten Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Zeigen Sie

a) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = \frac{1}{\alpha}) = 1$

b) $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 0) = 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_n] = \mu < \infty$, $Var[X_n] < \infty$ und es gelte $\frac{1}{n}Var(X_n) \to 0$. Zeigen Sie, dass die Folge dem schwachen Gesetz der Großen Zahlen folgt, d.h. der Mittelwert konvergiert stochastisch gegen den Erwartungswert

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n\log n} \qquad \text{und} \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen, aber nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass aus der Gültigkeit des starken Gesetzes folgen würde: $\frac{X_n}{n} \to 0$ *P-fast-sicher.*

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

(a) Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, geometrisch zum Parameter p verteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie zunächst die Charakteristische Funktion von X_1 und folgern sie, dass $S := X_1 + \ldots + X_n \sim NB(n, p)$, also negativ-binomialverteilt zu den Parametern n und p.

(b) Es sei Z eine doppelexponentialverteilte Zufallsvariable zu den Parametern 0 und λ, das heißt, sie besitzt die Dichte $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$. Berechnen Sie die charakteristische Funktion von Z.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $X, Y \sim Exp(\lambda)$ *unabhängig gilt, dass* $Z \overset{d}{=} X - Y$.

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)**.** Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ wird ein Zufallsexperiment unabhängig wiederholt. Es sei A_n das Ereignis, im $n$ten Versuch einen Erfolg zu erzielen, wobei $P(A_n) = p, \forall n \in \mathbb{N}$. Das Ereignis

$$A_{n,m} := \bigcap_{n\le k<n+m} A_k$$

bezeichnet eine mit dem $n$ten Versuch beginnende Erfolgsserie der Länge m. Zeigen Sie für $\alpha > 0$:

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_{n,\lceil \alpha \ln n \rceil}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{1}{\alpha} < \ln \frac{1}{p}, \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{\alpha} > \ln \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes $\delta > 0$ *und zeigen Sie, dass die Folge* $(A_{\lceil k^{1+\delta}\rceil, \lceil \alpha \ln \lceil k^{1+\delta}\rceil\rceil})_{k \geq k_0}$, $k_0 \in \mathbb{N}$, *unabhängig ist.*