Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 14

Abgabetermin: Mittwoch, 12.02.2020, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Theorem 18.11 die Gleichung (18.1) genau dann gilt, wenn $\mathcal{X}$ positiv rekurent ist und (18.2) genau dann gilt, wenn $\mathcal{X}$ entweder transient oder null-rekurrent ist.

Aufgabe 2 (8 Bonuspunkte)

Wir können ein Schachbrett als einen Graph auffassen, wobei wir die Menge der Knoten,

$$K = \{(u, v) : 1 \leq u, v \leq 8\},$$

in eine Matrix anordnen:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots & (1,8) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & (2,8) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots & (3,8) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (8,1) & (8,2) & (8,3) & \cdots & (8,8) \end{matrix}$$

Die Menge der Kanten sei gegeben durch

$$V = \{((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in K \times K : |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| = 1\}.$$

Die Punkte die durch eine Kante verbunden sind, sind benachbart. Die Nachbarn eines Knotens auf dem Graphen sind also gerade die Punkte die man durch Addieren oder Subtrahieren von 1 zu einer der Koordinaten erhält.

a) Eine einfache Irrfahrt auf dem Graphen ist eine Markov Kette, bei der das Teilchen sich einen neuen Zustand uniform unter den Nachbarn auswürfelt. Bestimmen Sie eine invariante Verteilung für die einfache Irrfahrt auf dem oben beschriebenen Graphen.

b) Nun modifizieren wir die Spielregeln. Das Teilchen wählt uniform eine der vier möglichen Richtungen. Es bewegt sich um einen Schritt in diese Richtung falls möglich. Ansonsten bleibt es stehen. Wie ändert sich die invariante Verteilung im Vergleich zu (a)?

c) Ein Springer kann von (v, u) aus zu einem der folgenden acht Felder ziehen (vorausgesetzt sie befinden sich auf dem Schachbrett):

$$(u + 2, v + 1), (u + 2, v - 1), (u + 1, v + 2), (u + 1, v - 2),$$
$$(u - 1, v + 2), (u - 1, v - 2), (u - 2, v + 1), (u - 2, v - 1).$$

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Felder, die ensteht, wenn man bei jedem Schritt einen von den legalen Springerzügen zufällig wählt. Bestimmen Sie die invariante Verteilung und die erwartete Anzahl von Zügen, die ein Springer braucht, um in $(1, 1)$ startend nach $(1, 1)$ zurückzukehren.