Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse"

Blatt 13

Abgabetermin: Mittwoch, 05.02.2020, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{X} = (X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ eine Markov-Kette in diskreter Zeit mit Zustandsraum E. Sei weiterhin $\emptyset \neq \partial E \subseteq E$. Weiter bezeichne $T := \inf\{t : X_t \in \partial E\}$ die Treffzeit von ∂E. Eine Verteilung ν auf $E^\circ := E \backslash \partial E$ heißt *quasistationäre Verteilung* von $\mathcal{X}$, falls für alle $x \in E^\circ$ und $t = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathrm{P}_\nu(X_t = x | T > t) = \nu(x).$$

Zeigen Sie:
Es gilt $\mathrm{P}_\nu(T > t) = \alpha^t$ für ein $\alpha \in [0, 1]$, d.h. T ist bei Start in ν geometrisch verteilt.

Hinweis: Begründen Sie, warum es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{P}_\nu(T > t + s) = \mathrm{P}_\nu(T > t) \cdot \mathrm{P}_\nu(T > s)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine einfach Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p_1 = p,\ p_{-1} = 1 - p$ für $p \neq \frac{1}{2}$ transient ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine *doppelt-stochastische* Matrix $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ mit $N := |I| < \infty$ wird definert durch:

$$\sum_{i=1}^N p_{ij} = 1 \text{ für alle } j \in I, \qquad \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \text{ für alle } i \in I.$$

Geben Sie eine Verteilung auf I an, die für alle doppelt-stochastischen Matrizen invariant ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{0, 1\}^m$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|x| = \sum_{k=1}^m |x_k|$.

a) Ist $\mathcal{X}$ irreduzibel? Ist $\mathcal{X}$ aperiodisch?

b) Berechnen Sie die invariante Verteilung von $\mathcal{X}$.