Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 12

Abgabetermin: Mittwoch, 29.01.2020, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des Skohorodschen Einbettungssatzes den *Zentralen Grenzwertsatz von Lévy*, d.h. zeigen Sie für eine unabhängige identisch verteilte Folge von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\geq 1}$ mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$, dass

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{für } n \to \infty$$

wobei $Z \sim N(0,1)$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel für eine Markov-Kette $\mathcal{X}$ und zwei Verteilungen $\mu \neq \nu$, so dass sowohl μ als auch ν invariant für $\mathcal{X}$ sind.

b) Beweisen Sie: Sind μ, ν invariant für eine Markov-Kette $\mathcal{X}$, dann auch $c\mu + (1-c)\nu$ für jedes $c \in [0,1]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ eine stationäre Markov-Kette. Es gelte $(X_{T+n})_{n=0,1,2,\ldots} \sim (X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ für jede Stoppzeit T, d.h. die Stationarität gilt auch für Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ fast sicher konstant ist.

Aufgabe 4 (6 Bonuspunkte)

Seien $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \ldots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,\infty))$ und $\mathcal{X}^1(0) = \mathcal{X}^2(0) = \cdots = 0$ sowie $\nu_\ell(\mathcal{X}_1), \nu_\ell(\mathcal{X}_2), \ldots$ die zugehörigen ℓ-Variationen. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

a) $\{\mathcal{X}_n : \ n = 1, 2, \ldots\}$ ist straff.

b) $\{\nu_1(\mathcal{X}_n) : \ n = 1, 2, \ldots\}$ ist straff.

c) $\{\nu_2(\mathcal{X}_n) : \ n = 1, 2, \ldots\}$ ist straff.

Beweisen oder widerlegen Sie (mit einem Gegenbeispiel), welche der Implikationen a)$\Rightarrow$b), b)$\Rightarrow$a), a)$\Rightarrow$c), c)$\Rightarrow$a), b)$\Rightarrow$c), c)$\Rightarrow$b) gelten.