Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 11

Abgabetermin: Mittwoch, 22.01.2020, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie *ohne Verwendung des Gesetzes vom iterierten Logarithmus*:

a) Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und $(t_n)_{n\geq 1}$ eine fallende Nullfolge reeler Zahlen. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} = \infty \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

b) Folgern Sie aus a), dass die Pfade von B f.s. nicht lokal Hölder-stetig von der Ordnung $\gamma = \frac{1}{2}$ sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(\sup_{s\leq t} B_s > \sqrt{2t \log\log\log t}) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Widerspricht dies dem Gesetz des iterierten Logarithmus?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $B = \big(B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(k)}\big)_{t\geq 0}$ eine k-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung, die im Punkt $x = (x_1, \dots, x_k)$ startet, d.h. die einzelnen Komponenten $(B_t^{(i)})_{t\geq 0}$ sind jeweils voneinander unabhängige Brownsche Bewegungen mit $B_0^{(i)} = x_i$ fast sicher (oder äquivalent: $(B_t^{(i)} - x_i)_{t\geq 0}$ sind unabhängige Standard-Brownsche Bewegungen für alle $1 \leq i \leq k$).
Es gelte $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2} < r$ für ein $r > 0$, und $T_r := \inf\{t > 0 : \|B_t\|_2 = r\}$ sei der erste Zeitpunkt, an dem die Brownsche Bewegung die $k-1$-dimensionale Sphäre $S_r^{k-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_2 = r\}$ mit Radius r um den Ursprung erreicht.
Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T_r]$.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass $(\|B_t\|_2^2 - kt)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist bzgl. der von B erzeugten Filtrierung $\mathbb{F}^B$ auf dem $\mathbb{R}^k$ (das sollte man sich kurz genauer überlegen).

Aufgabe 4 (6 Bonuspunkte)

Seien $Z_1, Z_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}(Z_1 = 1) = \mathbb{P}(Z_1 = -1) = \frac{1}{2}$, und $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität 1. Zeigen Sie, dass die Familie $(X^n)_{n=1,2,\dots}$ gegeben durch

$$X^n(t) = X_{n,t} = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} Z_{Y_s} ds$$

straff ist.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst für $t > s$, dass $E[Z_{Y(t)} Z_{Y(s)}] = e^{-(t-s)}$.