Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 10

Abgabetermin: Mittwoch, 15.01.2020, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Es sei $\mathcal{X}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}$ fast sicher für jedes $0 < \varepsilon < 1$ mindestens eine Nullstelle in $(0, \varepsilon)$ hat.

b) Sei $A(\omega) := \{t \in [0, \infty) \mid X_t(\omega) = 0\}$. Zeigen Sie mit Hilfe der starken Markov-Eigenschaft und a), dass A fast sicher eine abgeschlossene Menge ohne isolierte Punkte ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für $\ell \geq 1$ die ℓ-Variation eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $\mathcal{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ und $\mathcal{B}' = (B'_t)_{t\geq 0}$ Brown'sche Bewegungen und $T := \inf\{t \geq 0 \mid B_t = 0\}$. Betrachten Sie nun $\mathcal{X} = (X_t) := (B_{t\wedge T})$, eine bei 0 gestoppte, und $\mathcal{Y} = (Y_t) := (|B'_t|)$, eine bei 0 gespiegelte Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie für alle $t, x, y > 0$, dass

$$\mathrm{P}_x(X_t \leq y) = \mathrm{P}^y(x \leq Y_t),$$

wobei $\mathrm{P}_x(\,\cdot\,) := \mathrm{P}(\,\cdot\,|B_0 = x)$ und $\mathrm{P}^y(\,\cdot\,) := \mathrm{P}(\,\cdot\,|B'_0 = y)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für eine standardisierte Brown'sche Bewegung $(W_t)_t$ beide Seiten identisch sind zu $\mathrm{P}(W_t \geq x-y)+\mathrm{P}(W_t \geq x+y)$. Das Reflexionsprinzip kann hierbei hilfreich sein.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$ und jede gegen 0 konvergente Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{L}\left(\frac{B_{t+h_n} - B_t}{h_n}\right) \xrightarrow{w} \frac{1}{2}\delta_{-\infty} + \frac{1}{2}\delta_{\infty} \quad \text{für } n \to \infty,$$

d.h. die Verteilungen der Differenzenquotienten $\frac{B_{t+h_n}-B_t}{h_n}$ konvergieren, aufgefasst als Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, schwach gegen die oben genannte Konvexkombination der Einpunktmassen in $-\infty$ und ∞.