Abteilung für Mathematische Stochastik — Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. P. Pfaffelhuber — Timo Enger, M.Sc.

Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 9

Abgabetermin: Mittwoch, 08.01.2020, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_0 = x > 0$ ein Geburts-Todes-Prozess und $\lambda_n, \mu_n, n = 1, 2, ...$ wie in Beispiel 16.39.

a) Berechnen Sie für $T_y := \inf\{t : X_t = y\}$ und $N > x$

$$h(x) := \mathbf{P}(T_N < T_0 | X_0 = x).$$

b) Zeigen Sie, dass X, bedingt auf $\{T_N < T_0\}$, ebenfalls ein Geburts-Todesprozess, also insbesondere ein Markov-Prozess, ist. Berechnen Sie die Geburts- und Todesraten.

c) Berechnen Sie $E[T_0 | T_0 < T_N]$.

Hinweis: Finden Sie für Aufgabenteil a) eine Funktion S sodass $S(0) = 0$, $S(1) = 1$ und $S(X)$ ein Martingal ist und benutzen Sie dann Optional Stopping.
Zeigen und verwenden Sie bei b), dass der Generator G' von X bedingt auf $\{T_N < T_0\}$ die folgende Gleichung erfüllt

$$G'f(x) = \frac{(Gfh)(x)}{h(x)},$$

wobei G der Generator von X ist (ohne Bedingung).

Aufgabe 2 (4 Bonuspunkte)

Sei $(🎁_t)_{t\geq 0}$ eine 1-dimensionale Brown'sche Bewegung mit Start in 0 sowie $🌲 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $T_{🌲}$ die erste Treffzeit von $🌲$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}[T_{🌲}] = \infty$.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass für jedes $x > 0$ gilt $\mathrm{E}[e^{-xT_{🌲}}] = e^{-|🌲|\sqrt{2x}}$.

Aufgabe 3 (4 Bonuspunkte)

a) Sei $🎁 = \big(🎁_t\big)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit Generator $🎅$. Zeigen Sie für $f \in \mathcal{D}(🎅)$ mit $(🎅 f) \in \mathcal{C}_b$ und $\lambda \geq 0$, dass

$$\Big(e^{-\lambda t} f(🎁_t) + \int_0^t e^{-\lambda s}\big(\lambda f(🎁_s) - (🎅 f)(🎁_s)\big)ds\Big)_{t\geq 0}$$

ein Martingal ist.

b) Haben Sie dennoch ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins neue Jahr.