Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 8

Abgabetermin: Mittwoch, 18.12.2019, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{M}$ eine Brown'sche Bewegung, U_i fast sicher konstant für alle $0 \leq i < n$. Zeigen Sie für das in Aufgabe 2 von Blatt 6 eingeführte stochastische Integral $(\mathcal{H} \cdot \mathcal{M})$, dass es einen Markovprozess bildet. Unter welchen Bedingungen ist dieser zeitlich homogen? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Generator.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{Y} = (Y_t)_{t \geq 0}$ der Prozess aus Aufgabe 4 von Blatt 6.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{Y}$ zeitlich homogen ist mit Generator

$$G^{\mathcal{Y}} f(x) = -\tfrac{x}{2} f'(x) + \tfrac{1}{2} f''(x)$$

für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. (Dieser Prozess heißt auch Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei wieder $\mathcal{Y} = (Y_t)_{t \geq 0}$ der Prozess aus Aufgabe 4 von Blatt 6 und sei $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \geq 0}$ ein Sprungprozess auf $\mathbb{N}_0$, der von z nach $z-2$ mit Rate $z(z-1)/2$ springt. Laut Beispiel 16.33 hat dieser den Generator

$$G^{\mathcal{Z}} f(z) = \tfrac{z(z-1)}{2}\big(f(z-2) - f(z)\big).$$

Zeigen Sie: Sind $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}$ unabhängig, dann gilt

$$\mathrm{E}[Y_t^{Z_0}] = \mathrm{E}\Big[Y_0^{Z_t} \exp\Big(\int_0^t (\tfrac{1}{2} Z_r^2 - Z_r) dr\Big)\Big].$$

Hinweis: Berechnen Sie $\frac{d}{ds}\mathrm{E}\Big[Y_s^{Z_{t-s}} \exp\Big(\int_0^{t-s} (\tfrac{1}{2} Z_r^2 - Z_r) dr\Big)\Big]$.