Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 7

Abgabetermin: Mittwoch, 11.12.2019, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)

Es sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ streng monoton steigend mit $f(0) = 0$, $\mathcal{P} = (P_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität 1 und $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Markovkette in diskreter Zeit mit Werten in $\mathbb{Z}$ und Übergangsmatrix $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$. Weiterhin seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{M}$ stochastisch unabhängig.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t := M_{P_{f(t)}}$ einen Markov-Prozess bezüglich seiner natürlichen Filtration bildet und bestimmen Sie Übergangskerne und -operatoren.

b) Welche Vorraussetzungen müssen f und Π erfüllen damit der Prozess $\mathcal{X}$

1) räumlich homogen ist. 2) zeitlich homogen ist.

Bestimmen Sie in Fall 2) den Generator.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X = (X_n)_{n=0,1,\dots}$ ein diskreter stochastischer Prozess mit Zustandsraum E und $(\mathcal{F}_n)$ die von X erzeugte Filtrierung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

a) X ist ein Markovprozess,

b) der Prozess $Y = (Y_n)_{n=0,1,\dots}$ definiert durch

$$Y_n = f(X_n) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[f(X_k) - f(X_{k-1})|X_{k-1}]$$

ist ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)$ für alle messbaren und beschränkten Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien $\alpha, \sigma^2 \in (0, \infty)$. Sei weiter $K_t(x, \cdot) := N(xe^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}))$ für $t > 0$ und $K_0(x, \cdot) := \varepsilon_x$. Zeigen Sie:
Es existiert ein Markovprozess mit den Übergangskernen $(K_{s,t})_{s\leq t}$ definiert durch $K_{s,t} := K_{t-s}$.
Hinweis: Folgende Gleichung vereinfacht die Rechnung: $\int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{B-\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$.