Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 6

Abgabetermin: Mittwoch, 04.12.2019, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $\boldsymbol{\lambda}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ | B_t(\omega) = 0\}$ ist messbar (bzgl. der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$).

b) Es gilt fast sicher, dass
$$\boldsymbol{\lambda}\big(\{t \geq 0 \mid B_t = 0\}\big) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie bei Aufgabenteil b), dass $\mathbf{P}(B_t = 0)$ fast sicher für alle $t \geq 0$ gilt, sowie den Satz von Fubini.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiges Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$ seien weiterhin $U_0, \ldots, U_n$ reellwertige, integrierbare Zufallsvariablen, wobei U_i messbar bezüglich $\mathcal{F}_{t_i}$ sei für alle $0 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass das für

$$\mathcal{H} = (H_t)_{t\geq 0} \quad \text{mit} \quad H_t := \sum_{k=1}^{n} U_{k-1} \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t) \quad \text{durch} \quad (\mathcal{H}\cdot\mathcal{M})_t = \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}(M_{t_k\wedge t} - M_{t_{k-1}\wedge t})$$

definierte stochastische Integral ebenfalls ein Martingal bildet, das fast sicher konvergiert. Zeigen Sie außerdem, dass es stetige Pfade hat, sofern $\mathcal{M}$ stetige Pfade besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $U_1, U_2, \ldots$ und $T_1, T_2, \ldots$ Zufallsvariablen, die den folgenden Bedingungen genügen:

1) $U_n \xrightarrow{n\to\infty}_p u$,

2) $(T_n)_n$ und $(U_n T_n)_n$ sind uniform integrierbar,

3) $\mathrm{E}[T_n] \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Zeigen Sie, dass dann auch $\mathrm{E}[U_n T_n] \xrightarrow{n\to\infty} u$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass $T_n(U_n - u) \to_p 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(X(t))_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung und $Y(t) := e^{-t/2}X(e^t - 1)$. Zeigen Sie, dass $(Y(t))_{t\geq 0}$ ein Gauss-Prozess sowie ein Markov-Prozess ist. Bestimmen Sie außerdem den schwachen Grenzwert von $Y(t)$ für $t \to \infty$.